Tome 12. N° 4. Avril 1951.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM

SUR LA POSSIBILITÉ D'UNE STRUCTURE COMPLEXE DES PARTICULES DE SPIN DIFFÉRENT DE $\frac{1}{2}$

Par Louis de BROGLIE.

Sommaire. — L'idée que les particules de spin différent de $\frac{1}{2}$ $\left(\text{en unité } \frac{h}{2\pi}\right)$ sont complexes a été émise par l'auteur dès 1933-1934 lorsqu'il a commencé à développer sa Mécanique ondulatoire du photon. Elle a été reprise récemment, notamment dans un travail de M. Frenkel et dans un article de MM. Fermi et Yang. Nous avons étudié à nouveau cette question depuis quelque temps avec la collaboration de Mme Tonnelat et nous donnons ici un exposé de nos dernières idées à ce sujet.

Après avoir rappelé une tentative assez imparfaite que nous avions faite dans ce sens en 1936, nous la reprenons d'une manière qui paraît plus satisfaisante. Raisonnant sur le cas d'une particule de spin 1 considérée comme formée de deux constituants de spin $\frac{1}{2}$, nous montrons comment on peut séparer le mouvement du centre de gravité de la particule du mouvement « interne » et nous explicitons les solutions relatives au mouvement interne, qui sont étudiées d'autre part avec plus de détails par Mme Tonnelat. Nous montrons ensuite comment il est possible de transporter sur le centre de gravité les propriétés de spin de l'ensemble des deux constituants et de retrouver ainsi les équations bien connues qui représentent le mouvement des particules de spin 1 considérées comme des unités. On obtient également ainsi une interprétation de la forme non définie positive de la densité de probabilité de présence dans la théorie de la particule de spin 1. Ces considérations, qui sont vraisemblablement susceptibles de généralisations pour les particules de spin supérieur à 1, semblent justifier les idées qui ont servi de points de départ à la Mécanique ondulatoire du photon et qui nous ont permis d'écrire les équations de la particule de spin 1, puis de les généraliser par la même méthode aux cas des particules de spin supérieur à 1.

1. Exposé de la question. — Dans l'état actuel de nos connaissances, il est tentant de supposer que les particules de spin $\frac{1}{2}$ telles que l'électron, le proton, le neutron, le neutrino, etc. sont des particules ou corpuscules « élémentaires ».

Malgré la difficulté qu'il y a à préciser exactement l'idée de corpuscule élémentaire, il nous semble donc naturel d'admettre que les corpuscules élémentaires sont toujours de spin $\frac{1}{2}$, en ce sens que toute particule de spin différent de $\frac{1}{2}$ doit pouvoir se représenter comme formée par l'union de corpuscules de spin $\frac{1}{2}$. Cette idée se trouve renforcée par le fait bien connu que les particules de spin entier en unité $\left(\frac{h}{2\pi}\right)$ suivent la statistique de Bose-Einstein tandis que les particules de spin demi-entier suivent la statistique de Fermi-Dirac. Or, il résulte d'un théorème important démontré, il y a plus de 20 ans, avec rigueur par MM. Ehrenfest et Oppenheimer, qu'un système formé d'un nombre pair de constituants de spin $\frac{1}{2}$ doit suivre la statistique de Bose-Einstein, tandis qu'un système formé d'un nombre impair de constituants de spin $\frac{1}{2}$ doit obéir à la statistique de Fermi-Dirac; ce théorème a joué un rôle capital dans l'étude de la constitution des noyaux atomiques. Il vient fortement à l'appui de l'hypothèse faite plus haut sur la complexité des particules de spin différent de $\frac{1}{2}$.

C'est cette hypothèse sur la constitution des particules de spin différent de $\frac{1}{2}$ qui m'a amené dès 1933-1934 à tenter de construire sur cette base une théorie des photons. Les photons doivent, en effet, être des particules de spin 1 comme le prouve la symétrie de l'onde qui leur est associée, c'est-à-dire de l'onde électromagnétique, car les propriétés de polarisation de l'onde lumineuse peuvent être considérées comme traduisant le fait que le spin du photon a la valeur 1. J'ai donc essayé dès cette

date de construire une théorie du photon en le considérant comme une particule complexe formée de deux constituants de spin $\frac{1}{2}$. Naturellement, une telle théorie doit conduire à définir un état de la particule complexe (état pseudo-scalaire) où le spin résultant est nul par suite de la compensation du spin des deux constituants et un autre état (état vectoriel) où il y a addition du spin des deux constituants et où le spin résultant est par suite égal à 1 : le premier état correspondrait à un photon pseudo-scalaire de spin 0 qui n'est pas actuellement connu, tandis que l'état vectoriel décrit le photon usuel, le photon de la lumière. Ceci conduit à préciser que le système formé de deux constituants de spin $\frac{1}{2}$ forme une particule de « spin maximum » 1 susceptible de deux états, l'un de spin 1, l'autre de spin 0. Cette remarque se généralise pour les particules de spin maximum $n\left(n=\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots\right)$.

En développant cette théorie à laquelle j'ai donné le nom de « Mécanique ondulatoire du photon », j'ai admis que la masse propre du photon n'était pas rigoureusement nulle, mais seulement extraordinairement petite (par rapport à celle de l'électron). Je sais bien que cette hypothèse, qui amène à ne plus considérer l'invariance de jauge comme rigoureuse, est rejetée par la plupart des théoriciens. Bien que, personnellement l'hypothèse d'une masse propre non nulle du photon ne me paraisse pas inadmissible, je ne veux pas chercher ici à la défendre. Je ferai seulement remarquer qu'elle a l'avantage de permettre, en développant la théorie du photon, d'être conduit aux équations générales de la particule de spin 1 (avec termes de masse) et, si l'on veut ensuite attribuer au photon une masse propre nulle, on n'a plus qu'à poser égale à zéro, la masse propre qui figure dans les équations obtenues. C'est parce que j'ai suivi cette voie que j'ai pu obtenir dès 1934 (*Une nouvelle théorie de la lumière*, Hermann, 1934), à la fois sous forme spinorielle et sous forme tensorielle, les équations de la particule de spin 1 et, du même coup, celles de la particule de spin 0, avec les termes de masse. Ces équations ont été retrouvées deux ans plus tard (avec adjonction de termes de charge) par M. Alexandre Proca et elles sont aujourd'hui couramment appliquées aux mésons considérés comme des particules de spin 1 liées aux champs nucléaires.

On trouvera des exposés de la théorie du photon ainsi obtenue dans plusieurs ouvrages que j'ai publiés à ce sujet depuis 1934 [1]. J'ai montré en particulier comment, en introduisant dans cette théorie la seconde quantification, l'on pouvait retrouver la théorie quantique du champ électromagnétique qui doit son origine aux travaux de MM. Jordan, Pauli et Heisenberg. Il y a cependant quelques différences entre les résultats que l'on obtient ainsi et ceux de la théorie quantique des champs électromagnétiques sous sa forme usuelle : j'ai insisté sur ces points dans un récent Ouvrage [2]. On retrouve d'ailleurs dans ma présentation comme en théorie quantique des champs, les difficultés relatives à l'énergie d'interaction des particules électrisées avec le champ, énergie qui est trouvée infinie. Reprenant récemment une idée que j'avais émise, sous une forme imparfaite, dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de 1935 [3], j'ai essayé de trouver des valeurs finies pour l'énergie propre des corpuscules électrisés; je ne puis parler ici de cette tentative, car cela sortirait du cadre de mon exposé [4].

Généralisant l'idée qui m'avait guidé dans l'édification de la théorie de la particule de spin maximum 1, j'ai montré ensuite dans un Ouvrage intitulé *Théorie générale des particules de spin quelconque* [5] que l'on peut aisément obtenir les équations de la particule de spin maximum n en la considérant comme une particule complexe formée de $2n$ constituants de spin $\frac{1}{2}$ et en suivant la même voie que pour le photon. Les équations sont irréductiblement du type spinoriel pour les particules de spin demi-entiers $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$, tandis qu'on peut les ramener au type tensoriel pour les particules de spin entier (1, 2, 3, ...). On retrouve ainsi dans l'ensemble les résultats qui avaient été déjà donnés dans les beaux travaux de MM. Dirac, Pauli et Fierz sur ce sujet.

Dans toute cette théorie des particules de spin différent de 1 on attribue à la particule trois coordonnées que je nommerai X, Y, Z. Que représentent ces coordonnées si l'on admet que la particule est complexe? Je dois à M. Jean-Louis Destouches de m'avoir suggéré, presque dès le début de mes recherches à ce sujet, que les coordonnées X, Y, Z doivent être les coordonnées du centre de gravité de la particule complexe, ce qui dans le cas d'une particule de spin maximum 1 formée de deux constituants supposés de même masse m_0 conduit à poser

$$X=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad Y=\frac{y_1+y_2}{2}, \qquad Z=\frac{z_1+z_2}{2};$$

où x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 sont respectivement les coordonnées des deux constituants. Partant de là, j'ai généralement établi dans mes Ouvrages les équations de la particule de spin maximum 1 en écrivant les équations auxquelles obéiraient séparément les deux constituants de spin $\frac{1}{2}$ s'ils étaient sans interaction, puis en opérant une « fusion » des deux constituants, opération qui s'exprime mathématiquement par une fusion (verschmelzung) des matrices α de Dirac relatives aux constituants. Cette manière d'obtenir les équations de la particule de spin

maximum 1 par fusion des deux constituants, qui peut se généraliser pour la particule de spin maximum n, n'est qu'un procédé heuristique et n'est pas logiquement satisfaisante. Elle implique notamment que l'on introduise la masse propre M_0 de la particule complexe comme égale à la somme $2\,m_0$ des masses des constituants : or la formation de la particule stable à partir de ses constituants devant être exoénergétique, la masse propre de cette particule doit être inférieure à la somme des masses propres de ses constituants.

Conscient de l'insuffisance de mes raisonnements, j'ai essayé en 1936 dans une Note publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [6] d'établir une théorie détaillée de la structure complexe des particules de spin maximum 1. Les idées qui m'ont guidé en écrivant cette Note et que je crois toujours exactes, sont les suivantes :

1° Il doit être possible de séparer le mouvement du centre de gravité de la particule complexe du mouvement relatif des constituants autour du centre de gravité, de telle façon que le mouvement du centre de gravité soit décrit par les équations de la particule de spin 1 (du type des équations de la Mécanique ondulatoire du photon) et *de façon que soit ainsi réalisé un transfert sur le mouvement du centre de gravité des propriétés de spin des constituants*.

2° Dans le système propre de la particule, c'est-à-dire dans un système de référence où son centre de gravité est au repos, il doit être possible de trouver une fonction d'onde qui décrive l'état interne de la particule.

3° La complexité interne de la particule doit pouvoir expliquer pourquoi la densité de probabilité de présence qui, pour un corpuscule de spin $\frac{1}{2}$ a la forme définie positive $|\Psi|^2$, n'a plus cette forme pour une particule de spin différent de $\frac{1}{2}$, mais peut, dans le cas d'une particule de spin maximum 1 animé d'un mouvement d'ensemble rectiligne et uniforme de vitesse βc, s'écrire $|\Phi|^2\sqrt{1-\beta^2}$, avec apparition du facteur de contraction de Lorentz $\sqrt{1-\beta^2}$, Φ étant ici la fonction d'ondes.

Si les idées précédentes qui m'ont guidé dans ma Note de 1936 me paraissent toujours exactes, je dois dire que la façon dont j'ai alors essayé de les développer ne m'a jamais donné satisfaction. En écrivant l'équation du système des deux constituants, je n'avais pas introduit de terme d'interaction, ce qui revenait à admettre implicitement entre ces constituants une interaction en $\delta\left(\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|\right)$, hypothèse arbitraire qui conduisait à des difficultés : de plus, la masse propre M_0 de la particule complexe était toujours posée égale à la somme $2\,m_0$ des masses propres des constituants, ce qui, comme je l'ai dit déjà, n'est guère admissible.

Après être resté longtemps sans reprendre ce problème, j'ai eu connaissance, il y a deux ou trois ans, d'un Mémoire de M. Frenkel où il a développé, sans avoir eu connaissance de mes travaux, des idées très analogues aux miennes [7]. Il a écrit en effet, en parlant des équations d'ondes des particules de spin différent de $\frac{1}{2}$: « I believe that equations of this type will give an adequate description of complex particles treated as material points with certain inner degrees of freedom ». Mon attention ayant été ramenée sur ce sujet par la lecture de ce Mémoire, j'ai entrepris alors avec Mme Tonnelat quelques nouveaux calculs qui ne nous ont pas donné entière satisfaction et que nous n'avons pas publiés. Mais tout récemment une tentative analogue a été faite par MM. E. Fermi et C. N. Yang [8] qui ont calculé la fonction d'onde représentant l'état interne pseudo-scalaire d'un méson considéré comme une particule complexe formée de deux constituants de spin $\frac{1}{2}$. Nous avons alors, Mme Tonnelat et moi, repris de nouveau l'étude de la question et nous sommes parvenus à des résultats qui sont, je crois, beaucoup plus satisfaisants que les résultats antérieurs : on trouvera dans un article complémentaire de Mme Tonnelat quelques précisions sur le détail des calculs.

2. Vérification des trois idées directrices.

— Nous désignerons par x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 les coordonnées des deux constituants de spin $\frac{1}{2}$ que nous supposerons pour simplifier avoir la même masse m_0. Ces deux constituants ont pour équation d'ondes des équations de Dirac où nous choisirons, suivant notre habitude, pour les matrices α de Dirac les valeurs suivantes :

$$\alpha_1=\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix},\qquad \alpha_2=\begin{vmatrix}0&0&0&i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\-i&0&0&0\end{vmatrix},$$
$$\alpha_3=\begin{vmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{vmatrix},\qquad \alpha_4=\begin{vmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}. \tag{1}$$

Nous introduirons ensuite les matrices à 16 lignes et 16 colonnes qui sont classiques en Mécanique ondulatoire du photon :

$$(a_j^{(1)})_{ik,lm}=(\alpha_j)_{il}\,\delta_{km},\qquad (a_j^{(2)})_{ik,lm}=(-1)^j(\alpha_j)_{km}\,\delta_{il}; \tag{2}$$

où les δ sont des symboles de Kronecker et où tous les indices varient de 1 à 4.

Nous prendrons alors comme équations d'ondes du système des deux corpuscules de spin $\frac{1}{2}$ formant

la particule complexe (comme dans ma Note de 1936, mais avec en plus un terme d'interaction) :

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \Psi_{ik}}{\partial t} = \Big[a_1^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_1} + a_1^{(2)}\frac{\partial}{\partial x_2} + a_2^{(1)}\frac{\partial}{\partial y_1} + a_2^{(2)}\frac{\partial}{\partial y_2} + a_3^{(1)}\frac{\partial}{\partial z_1} + a_3^{(2)}\frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{2\pi i}{h} m_0 c(a_4^{(1)}+a_4^{(2)}) + \frac{2\pi i}{h} V\left(\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|\right)\left(1-\vec{\alpha}_1 . \vec{\alpha}_2\right)\Big]\Psi_{ik}, \qquad (3)$$

les Ψ_{ik} $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, t)$ étant les 16 composantes de la fonction d'onde du système des deux constituants. Nous avons introduit un terme d'interaction de la forme proposée par M. Fermi dans son récent Mémoire. On peut choisir, à titre d'essai, pour la fonction $V\left(\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|\right)$ une forme simple telle que celle du « trou de potentiel ».

Nous définirons alors les coordonnées X, Y, Z du centre de gravité de la particule complexe et les coordonnées relatives ξ, η, ζ par les formules

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{x_1+x_2}{2}, \qquad Y = \frac{y_1+y_2}{2}, \qquad Z = \frac{z_1+z_2}{2}; \\ \xi &= x_1 - X = \frac{x_1-x_2}{2}, \qquad \eta = y_1 - Y = \frac{y_1-y_2}{2}, \\ \zeta &= z_1 - Z = \frac{z_1-z_2}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Si nous employons ces nouvelles variables, l'équation d'onde (3) s'écrit :

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \Psi_{ik}}{\partial t} = \Big[\frac{a_1^{(1)}+a_1^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{a_2^{(1)}+a_2^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial Y} + \frac{a_3^{(1)}+a_3^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{a_1^{(1)}-a_1^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{a_2^{(1)}-a_2^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{a_3^{(1)}-a_3^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{2\pi i}{h} m_0 c(a_4^{(1)}+a_4^{(2)}) + \frac{2\pi i}{h} V\left(1-\vec{\alpha}_1\,\vec{\alpha}_2\right)\Big]\Psi_{ik}, \qquad (5)$$

où Ψ_{ik} est maintenant exprimée à l'aide des variables X, Y, Z, ξ, η, ζ.

Plaçons-nous maintenant dans le système propre de la particule, c'est-à-dire dans un système de référence où le centre de gravité est au repos et où la fonction d'onde, que nous désignerons par $\Psi^{(0)}$ $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, t_0)$ en affectant de l'indice o tout ce qui se rapporte au système propre, ne dépend plus que des variables relatives. Dans le système propre, nous obtenons les équations suivantes, pour déterminer les états internes quantifiés de la particule complexe :

$$\Big[\frac{a_1^{(1)}-a_1^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial \xi_0} + \frac{a_2^{(1)}-a_2^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial \eta_0} + \frac{a_3^{(1)}-a_3^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial \zeta_0} + \frac{2\pi i}{h} m_0 c(a_4^{(1)}+a_4^{(2)}) + \frac{2\pi i}{h} V\left(\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|\right)\left(1-\vec{\alpha}_1 . \vec{\alpha}_2\right)\Big]\Psi_{ik}^{(0)} = \frac{2\pi i}{h}\frac{W_0}{c}\Psi_{ik}^{(0)}. \qquad (6)$$

A l'état interne d'énergie quantifiée W_0 correspond une masse propre de la particule complexe égale d'après le principe de l'inertie de l'énergie à $M_0 = \frac{W_0}{c^2}$.

On trouve ainsi d'abord une série d'états quantifiés internes pseudo-scalaires; puis on trouve une autre série d'états quantifiés vectoriels. Chacune de ces séries peut être représentée par les solutions trouvées par M. Fermi et aussi par des solutions indépendantes qui, d'après leur forme, correspondent à des doublets dont l'axe est dirigé suivant $O\xi_0$, $O\eta_0$ ou $O\zeta_0$.

Nous fixerons notre attention exclusivement sur les états « normaux », c'est-à-dire sur ceux qui, dans le cas vectoriel comme dans le cas pseudo-scalaire, correspondent à la plus petite valeur propre. Soit alors

$$\Psi_{ik}^{(0)}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, t_0) = \varphi_{ik}^{(0)}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, t_0)\, e^{\frac{2\pi i}{h} M_0 c^2 t_0}, \qquad (7)$$

l'un de ces états normaux (la valeur de M_0 peut varier suivant que l'état considéré est l'état normal vectoriel ou l'état normal pseudo-scalaire et la forme des $\varphi_{ik}^{(0)}$ varie suivant que l'état considéré est l'état normal pseudo-scalaire, ou l'un ou l'autre des états triplets vectoriels normaux).

Il s'agit maintenant de retrouver pour le mouvement du centre de gravité de la particule complexe, les équations de la particule de spin maximum 1 de telle façon que le spin des constituants se trouve reporté sur le centre de gravité.

Pour cela nous remarquerons que, d'après les résultats connus de la Mécanique ondulatoire du photon, pour une onde plane monochromatique décrivant un mouvement d'ensemble rectiligne et uniforme de la particule, il y a quatre indices privilégiés, que je désignerai par $\underline{i}\,\underline{k}$, tels que les composantes $\Phi_{\underline{i}\underline{k}}^{(0)}$ (t_0) de cette onde dans le système propre soient les seules composantes non nulles (quand on prend dans le système propre l'axe des z dans la direction de la propagation initiale de l'onde). Avec la représentation (I) adoptée ici pour les α, l'indice $\underline{i}$ ne peut prendre que les valeurs 3 et 4 et l'indice $\underline{k}$ que les valeurs 1 et 2. D'autre part, nous venons de voir qu'il existe quatre états quantifiés normaux de la particule, l'un à symétrie sphérique, les trois autres correspondant à un doublet.

Il est alors aisé de voir que l'on peut faire correspondre chacune de ces quatre solutions à un couple d'indices privilégiés ([1]) et par suite la représenter par $\varphi_{\underline{i}\underline{k}}^{(0)}$. La fonction d'onde du système pouvant

([1]) En réalité, ceci n'est pas tout à fait exact, parce que, tandis que les deux états vectoriels de composantes de spin le long de Oz égales à $+1$ correspondent respectivement aux couples d'indices $\underline{i} = 3$, $\underline{k} = 1$ et $\underline{i} = 4$, $\underline{k} = 2$, l'état pseudo-scalaire et le troisième état vectoriel intéressent à la fois les couples d'indices $\underline{i} = 3$, $\underline{k} = 2$ et $\underline{i} = 4$, $\underline{k} = 1$, ce qui oblige à compliquer un peu la démonstration qui suit sans rien y changer d'essentiel (*voir* Appendice).

correspondre à une superposition d'états quantifiés normaux, nous poserons

$$\Psi^{(0)}_{rs}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, t_0) = \sum_{\underline{ik}} a^{(0)}_{\underline{ik}} (\varphi^{(0)}_{\underline{ik}})_{rs}\, e^{\frac{2\pi i}{h} W^{(0)}_{\underline{ik}} t_0}. \tag{8}$$

où $(\varphi^{(0)}_{\underline{ik}})_{rs}$ est la composante rs de la fonction $\varphi^{(0)}_{\underline{ik}}$. Les fonctions indépendantes $\varphi^{(0)}_{\underline{ik}}$ représentant les différents états de spin sont orthogonales entre elles : nous les normerons de façon à avoir

$$\int \sum_{rs} (\varphi^{(0)}_{\underline{ik}})^*_{rs} (\varphi^{(0)}_{\underline{jl}})_{rs}\, d\tau_0 = \delta_{\underline{ij}}\, \delta_{\underline{kl}} \frac{1}{|\Delta|}, \tag{9}$$

où $d\tau_0 = d\xi_0 d\eta_0 d\zeta_0$ et où Δ est le déterminant jacobien (égal à -8) des variables x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 par rapport aux variables X, Y, Z, ξ, η, ζ. Nous définirons les seules composantes non nulles de la fonction $\Phi^{(0)}(t_0)$ qui décrit le mouvement du centre de gravité dans le système propre par la formule

$$\Phi^{(0)}_{\underline{ik}}(t_0) = |\Delta| \int \varphi^{(0)*}_{\underline{ik}} \Psi^0\, d\tau_0, \tag{10}$$

c'est-à-dire que $\Phi^{(0)}_{\underline{ik}}$ est la projection de $\Psi^{(0)}$ sur $\varphi^{(0)}_{\underline{ik}}$. On trouve alors, d'après (8),

$$\begin{aligned}\Phi^{(0)}_{\underline{ik}}(t_0) &= |\Delta| \sum_{\underline{jl}} a^{(0)}_{\underline{jl}} \int \sum_{rs} (\varphi^{(0)}_{\underline{ik}})^*_{rs} (\varphi^{(0)}_{\underline{jl}})_{rs}\, d\tau_0\, e^{\frac{2\pi i}{h} W^{(0)}_{\underline{jl}} t_0} \\ &= a^{(0)}_{\underline{ik}}\, e^{\frac{2\pi i}{h} W^{(0)}_{\underline{ik}} t_0},\end{aligned} \tag{11}$$

On a ainsi défini dans le système propre la fonction d'onde du centre de gravité, c'est-à-dire la fonction d'onde de la particule complexe considérée comme une unité. Si l'on passe alors du système propre à un autre système galiléen par une transformation de Lorentz avec vitesse relative le long de l'axe oz (qui a servi à classer les états normaux dans le système propre), la fonction $\Phi(X, Y, Z, t)$ obtenue par cette transformation à partir de $\Phi^{(0)}(t_0)$ satisfait aux équations de la particule de spin 1 ou de spin 0 et admet par suite les solutions vectorielles et pseudoscalaires bien connues en Mécanique ondulatoire du photon.

Finalement nous sommes donc parvenus à décrire les états quantifiés internes de la particule et à reporter, d'une façon qui me paraît satisfaisante, le spin des constituants sur le centre de gravité. Les deux premiers points du programme tracé dans notre Note de 1936 se trouvent ainsi remplis; il reste à examiner le troisième point en reprenant, avec nos nouvelles définitions, le raisonnement esquissé en 1936.

Reprenons la question. Si Φ désigne la fonction d'onde d'une particule de spin 1, la quantité $|\Phi|^2 = \sum_{ik} |\Phi_{ik}|^2$ représente la densité d'énergie et non pas la densité de probabilité de présence. Pour obtenir une quantité qui puisse, dans une certaine mesure, jouer le rôle de probabilité de présence, il faut considérer la grandeur

$$\rho = \sum_{ik} \Phi^*_{ik} \frac{a_4^{(1)} + a_4^{(2)}}{2} \Phi_{ik}. \tag{12}$$

Or si l'onde Φ est une onde plane monochromatique décrivant un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse βc de la particule, on trouve que ρ a la valeur $\sum_{ik} |\Phi_{ik}|^2 \sqrt{1-\beta^2}$, où l'on voit apparaître le facteur $\sqrt{1-\beta^2}$ de la contraction de Lorentz. D'où cela provient-il ?

Pour essayer de le comprendre, remarquons d'abord que si $\Psi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, t)$ est la fonction d'onde du système formé par les deux constituants, la quantité

$$\begin{aligned}&|\Psi|^2\, dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2 \\ &\quad = \sum_{ik} |\Psi_{ik}|^2\, dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2\end{aligned}$$

sera la probabilité de présence du point figuratif dans l'élément $dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2$ de l'espace de configuration à l'instant t. Nous devons donc normer Ψ en posant

$$\begin{aligned}1 &= \int \sum_{ik} |\Psi_{ik}|^2\, dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2 \\ &= \int \sum_{ik} |\Psi_{ik}|^2 |\Delta|\, dX\, dY\, dZ\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,\end{aligned} \tag{13}$$

Δ étant le déterminant fonctionnel déjà rencontré plus haut. Dans le système propre, on doit aussi avoir de même

$$\int \sum_{ik} |\Psi^{(0)}_{ik}|^2 |\Delta|\, dX_0\, dY_0\, dZ_0\, d\xi_0\, d\eta_0\, d\zeta_0 = 1. \tag{14}$$

Or la contraction de Lorentz nous donne

$$\left.\begin{aligned}dX\, dY\, dZ &= dX_0\, dY_0\, dZ_0 \sqrt{1-\beta^2}, \\ d\xi\, d\eta\, d\zeta &= d\xi_0\, d\eta_0\, d\zeta_0 \sqrt{1-\beta^2}\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

et le fait que $|\Psi|^2$ et $|\Psi^{(0)}|^2$ ne dépendent pas de X, Y, Z et de X_0, Y_0, Z_0 permet de voir que

$$\begin{aligned}&\int \sum_{rs} |\Psi_{rs}|^2\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \\ &\quad = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \int \sum_{rs} |\Psi^{(0)}_{rs}|^2\, d\xi_0\, d\eta_0\, d\zeta_0.\end{aligned} \tag{16}$$

D'autre part, d'après la façon dont nous avons défini les amplitudes de la fonction d'onde Φ du centre de gravité de manière à reporter sur lui le spin des constituants, on voit que, lorsqu'on passe du système propre à un autre système galiléen, la transformation des $a^{(0)}_{ik}$ en a_{ik} est la même que la transformation des $\Psi^{(0)}_{ik}$ en Ψ_{ik}. On peut donc écrire encore la relation (16) en y remplaçant les Ψ par

les a, ce qui, d'après la seconde relation (15), donne, puisque les a sont des constantes,

$$\sum_{rs} |a_{rs}|^2 = \frac{\sum_{rs} |a_{rs}^{(0)}|^2}{1-\beta^2} = \sum_{\underline{ik}} |a_{\underline{ik}}^{(0)}|^2 \frac{1}{1-\beta^2}, \qquad (17)$$

car, parmi les $a_{rs}^{(0)}$, seuls les $a_{\underline{ik}}^{(0)}$ sont différents de zéro.

Maintenant il est évident que l'on doit obtenir la probabilité de présence du centre de gravité de la particule complexe dans l'élément de volume $\mathrm{d}X\mathrm{d}Y\mathrm{d}Z$ en intégrant sur ξ, η, ζ l'expression

$$\sum_{rs} |\Psi_{rs}|^2 |\Delta| \,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y\,\mathrm{d}Z\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta$$

de la probabilité de présence dans l'espace de configuration. La probabilité de présence de la particule complexe considérée comme une unité est donc

$$\rho(X, Y, Z, t) = \int \sum_{rs} |\Psi_{rs}|^2 \,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta\, |\Delta|$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \int \sum_{rs} |\Psi_{rs}^{(0)}|^2 |\Delta| \,\mathrm{d}\xi_0\,\mathrm{d}\eta_0\,\mathrm{d}\zeta_0. \qquad (18)$$

Or, avec les définitions adoptées et la normalisation (9) des $\varphi_{ik}^{(0)}$, nous avons

$$\int \sum_{rs} |\Psi_{rs}^{(0)}|^2 \,\mathrm{d}\xi_0\,\mathrm{d}\eta_0\,\mathrm{d}\zeta_0$$
$$= \sum_{\underline{ik}} \sum_{\underline{jl}} a_{\underline{ik}}^{(0)*} a_{\underline{jl}}^{(0)} \int \sum_{rs} (\varphi_{\underline{ik}}^{(0)})_{rs}^{*} (\varphi_{\underline{jl}}^{(0)})_{rs} \,\mathrm{d}\tau_0$$
$$= \sum_{\underline{ik}} \frac{|a_{\underline{ik}}^{(0)}|^2}{|\Delta|} = \sum_{ik} |a_{ik}|^2 \frac{1-\beta^2}{|\Delta|}. \qquad (19)$$

D'où

$$\rho(X, Y, Z, t) = \sum_{ik} |a_{ik}|^2 \sqrt{1-\beta^2}, \qquad (20)$$

ce qui est bien la formule que l'on voulait retrouver.

Nous avons donc maintenant justifié les trois idées essentielles de la Note de 1936. Nous l'avons fait en nous bornant à considérer une particule de spin maximum 1 dont les deux constituants de spin $\frac{1}{2}$ auraient la même masse propre. On pourrait généraliser en considérant une particule de spin maximum n $\left(\text{en unité } \frac{h}{2\pi}\right)$ formée de $2n$ constituants de spin $\frac{1}{2}$ toujours supposés avoir la même masse propre. On retrouverait alors pour le mouvement du centre de gravité les équations d'onde de la particule de spin maximum n et l'on parviendrait à justifier l'expression correspondante de la probabilité de présence qui pour une onde plane monochromatique est

$$\rho(X, Y, Z, t) = \sum_{rs\ldots} |\Phi_{rs\ldots}|^2 (1-\beta^2)^{\frac{2n-1}{2}}$$

et contient $(2n-1)$ fois le facteur de contraction de Lorentz par suite des $(2n-1)$ intégrations sur les $(2n-1)$ variables relatives ζ. Il serait probablement assez aisé de généraliser ce qui précède en attribuant des masses propres différentes aux divers constituants de la particule complexe.

3. **Conclusions.** — Avant de conclure, nous voulons présenter deux remarques qui nous paraissent intéressantes.

D'abord, nous noterons que nous n'avons pas, à proprement parler, donné une déduction des équations de la particule de spin 1 à partir des équations (5) du système des deux constituants. Nous avons seulement montré qu'il est *possible* d'opérer, par un procédé qui paraît naturel, le transport des propriétés de spin des constituants sur le mouvement du centre de gravité : ce faisant, nous avons obtenu, pour le mouvement d'ensemble de la particule complexe considérée comme une unité, des équations d'onde qui « reflètent » pour ainsi dire les propriétés de symétrie de son état interne, et ces équations d'ondes sont précisément les équations d'ondes de la particule de spin 1. Ainsi bien délimité le résultat obtenu nous apparaît comme constituant néanmoins un progrès important.

Pour développer notre seconde remarque, nous partirons de l'observation suivante. Dans la Mécanique ondulatoire sans spin et dans la Mécanique ondulatoire de la particule de spin $\frac{1}{2}$ (théorie de Dirac), on peut toujours envisager sur un pied de parfaite égalité « la représentation q » liée aux localisations dans l'espace et la « représentation p » liée aux états de mouvement (ondes planes monochromatiques quand il n'y a pas de champ). Ces deux représentations décrivent les deux « aspects complémentaires » sous lesquels on peut toujours d'après Bohr envisager une particule. Or, en Mécanique ondulatoire du photon ou en théorie quantique des champs (théories qui sont presque équivalentes), on introduit toujours dans toutes les formules, qu'elles soient ou non superquantifiées, le développement des fonctions d'onde ou des grandeurs électromagnétiques en ondes planes monochromatiques, comme si la représentation p présentait ici une véritable supériorité sur la représentation q. Rappelons qu'en Mécanique ondulatoire du photon, nous avons été amenés à adopter une densité de probabilité de présence $\rho = \Phi^* \frac{a_4^{(1)} + a_4^{(2)}}{2} \Phi$, qui est définie positive $\left(\text{et égale à } |\Phi|^2 \sqrt{1-\beta^2}\right)$ dans le cas d'une onde plane monochromatique, mais qui ne l'est pas dans le cas général; ceci souligne bien les difficultés de la représentation q dans ces théories. Les idées exposées dans le présent article semblent permettre d'entrevoir l'origine de la supériorité que prend ici la représentation p sur la représentation q. En effet, pour définir d'onde Φ de la particule de

spin 1 considérée comme une unité, nous sommes partis de la description de l'état interne dans le système de référence propre du centre de gravité : or ce système n'est défini que si la particule complexe a un mouvement d'ensemble rectiligne et uniforme, donc représenté par une onde plane monochromatique. En considérant une « superposition » de tels mouvements, on arrive à une définition de la fonction Φ qui est essentiellement liée à sa décomposition en ondes planes monochromatiques, c'est-à-dire à sa représentation p et, en y réfléchissant, on comprend d'où vient la difficulté de la représentation q.

En résumé, les considérations exposées ci-dessus paraissent apporter une confirmation de la conception suivant laquelle les particules de spin diffèrent de $\frac{1}{2}$ seraient des particules complexes formées de constituants de spin $\frac{1}{2}$. Elles semblent justifier les idées qui ont servi de points de départ pour la Mécanique ondulatoire du photon et de ses généralisations pour les particules de spin total maximum supérieur à 1 et elles doivent permettre d'établir sur une base plus solide que dans mes exposés antérieurs la déduction des équations d'ondes du photon et de toutes celles qu'on en déduit par généralisation.

APPENDICE.

Dans cet Appendice, nous voulons reprendre plus rigoureusement les démonstrations esquissées dans le texte. Nous représenterons par $\varphi_{0,0}^{(0)}, \varphi_{1,1}^{(0)}, \varphi_{1,0}^{(0)}, \varphi_{1,-1}^{(0)}$ les fonctions d'onde qui, dans le système propre, représentent respectivement l'état à symétrie sphérique et les trois états correspondant à un doublet. A partir de ces quatre fonctions d'onde orthogonales et supposées normées $\left(\text{en } \frac{1}{|\Delta|}\right)$, nous pouvons définir les quatre fonctions orthonormales suivantes :

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_{\underline{41}}^{(0)} = \varphi_{1,1}^{(0)}, \qquad \varphi_{\underline{32}}^{(0)} = \varphi_{1,-1}^{(0)}, \\ &\varphi_{\underline{42}}^{(0)} = \frac{\varphi_{1,0}^{(0)} + \varphi_{0,0}^{(0)}}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi_{\underline{31}}^{(0)} = \frac{\varphi_{1,0}^{(0)} - \varphi_{0,0}^{(0)}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Supposons d'abord que la masse propre de l'état pseudo-scalaire ait la même valeur M_0 que la masse propre des états vectoriels. On pourra alors désigner par P le facteur de phase $e^{\frac{2\pi i}{h} M_0 c^2 t_0}$ qui sera le même pour les deux sortes d'états et l'on posera simplement

$$\Psi_0 = \sum_{\underline{ik}} c_{\underline{ik}}^{(0)} \varphi_{\underline{ik}}^{(0)} P. \tag{2}$$

La définition

$$\Phi_{\underline{ik}}^{(0)} = |\Delta| \int \varphi_{\underline{ik}}^{(0)*} \Psi^{(0)} \, d\tau_0 \tag{3}$$

donne

$$\Phi_{\underline{ik}}^{(0)} = a_{\underline{ik}}^{(0)} P, \qquad \text{avec} \quad a_{\underline{ik}}^{(0)} = c_{\underline{ik}}^{(0)} \tag{4}$$

et le transport du spin sur le centre de gravité se trouve ainsi effectué tout à fait correctement. D'autre part, la démonstration du « théorème de la contraction de Lorentz » donnée dans le texte repose uniquement sur la relation

$$|\Delta| \int |\Psi^{(0)}|^2 \, d\tau_0 = \sum_{\underline{ik}} |\Phi_{\underline{ik}}^{(0)}|^2, \tag{5}$$

qui est ici tout à fait évidente puisque les $a_{\underline{ik}}^{(0)}$ et les $c_{\underline{ik}}^{(0)}$ coïncident.

Le raisonnement est un peu plus délicat dans le cas où la masse propre $M_0^{(S)}$ de l'état pseudo-scalaire n'est pas égale à la masse propre $M_0^{(V)}$ des états vectoriels. Il faut alors distinguer le facteur de phase $P_S = e^{\frac{2\pi i}{h} M_0^{(S)} c^2 t_0}$ de l'état pseudo-scalaire du facteur de phase $P_V = e^{\frac{2\pi i}{h} M_0^{(V)} c^2 t_0}$ des états vectoriels. Les formules de la Mécanique ondulatoire du photon conduisent à poser à la place de (2)

$$\begin{aligned} \Psi_0 = {} & \left[c_{\underline{41}}^{(0)} \varphi_{1,1}^{(0)} + c_{\underline{32}}^{(0)} \varphi_{1,-1}^{(0)} + \frac{c_{\underline{42}}^{(0)} + c_{\underline{31}}^{(0)}}{\sqrt{2}} \varphi_{1,0}^{(0)} \right] P_V \\ & + \frac{c_{\underline{42}}^{(0)} - c_{\underline{31}}^{(0)}}{\sqrt{2}} \varphi_{0,0} P_S. \end{aligned} \tag{6}$$

La définition (3) que nous conservons nous donne

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_{\underline{41}}^{(0)} = a_{\underline{41}}^{(0)} P_V, \qquad \Phi_{\underline{32}}^{(0)} = a_{\underline{32}}^{(0)} P_V, \\ &\Phi_{\underline{42}}^{(0)} = (a_{\underline{42}}^{(0)})_V P_V + (a_{\underline{42}}^{(0)})_S P_S, \\ &\Phi_{\underline{31}}^{(0)} = (a_{\underline{31}}^{(0)})_V P_V + (a_{\underline{31}}^{(0)})_S P_S, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

avec

$$\left.\begin{aligned} &a_{\underline{41}}^{(0)} = c_{\underline{41}}^{(0)}, \qquad a_{\underline{32}}^{(0)} = c_{\underline{32}}^{(0)}, \\ &(a_{\underline{42}}^{(0)})_V = \frac{c_{\underline{42}}^{(0)} + c_{\underline{31}}^{(0)}}{2}, \qquad (a_{\underline{42}}^{(0)})_S = \frac{c_{\underline{42}}^{(0)} - c_{\underline{31}}^{(0)}}{2}, \\ &(a_{\underline{31}}^{(0)})_V = \frac{c_{\underline{42}}^{(0)} + c_{\underline{31}}^{(0)}}{2} = (a_{\underline{42}}^{(0)})_V, \\ &(a_{\underline{31}}^{(0)})_S = -\frac{c_{\underline{42}}^{(0)} - c_{\underline{31}}^{(0)}}{2} = -(a_{\underline{42}}^{(0)})_S. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Si, dans les formules (6), (7) et (8), on fait $P_S = P_V = P$, on retombe, comme cela doit être, sur les formules (2) et (4). Les formules (7) et (8) réalisent correctement le transport du spin sur le centre de gravité.

Pour que le « théorème de la contraction de Lorentz » puisse ici encore être démontré, il faut toujours que la formule (5) soit vérifiée. Or on trouve aisément

$$\left.\begin{aligned} |\Delta| \int |\Psi^{(0)}|^2 \, d\tau_0 = {} & |c_{\underline{41}}^{(0)}|^2 + |c_{\underline{32}}^{(0)}|^2 \\ & + |c_{\underline{42}}^{(0)}|^2 + |c_{\underline{31}}^{(0)}|^2, \\ \sum_{\underline{ik}} |\Phi_{\underline{ik}}^{(0)}|^2 = {} & |a_{\underline{41}}^{(0)}|^2 + |a_{\underline{32}}^{(0)}|^2 + |(a_{\underline{42}}^{(0)})_V|^2 \\ & + |(a_{\underline{42}}^{(0)})_S|^2 + |(a_{\underline{31}}^{(0)})_V|^2 + |(a_{\underline{31}}^{(0)})_S|^2 \\ & + \Big[\big((a_{\underline{42}}^{(0)})_V^* (a_{\underline{42}}^{(0)})_S \\ & \quad + (a_{\underline{31}}^{(0)})_V^* (a_{\underline{31}}^{(0)})_S \big) P_V^* P_S \\ & \quad + \text{conjuguée} \Big]. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

et les relations (8), qui montrent la nullité du dernier crochet, permettent de vérifier aisément la relation (5).

Manuscrit reçu le 7 novembre 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BROGLIE L. DE — Une nouvelle théorie de la lumière. *Actualités scientifiques*, n° 181, Hermann, Paris, 1934. Nouvelles recherches sur la théorie de la lumière. *Actualités scientifiques*, n° 411, Hermann, Paris, 1936. Une nouvelle théorie de la lumière : la Mécanique ondulatoire du photon, Hermann, Paris, 2 volumes, 1940-1942.

[2] BROGLIE L. DE. — La Mécanique ondulatoire du photon et la théorie quantique des champs électromagnétiques, Gauthiers-Villars, Paris, 1949.

[3] BROGLIE L. DE. — *C. R. Acad. Sc.*, 1935, **200**, 361.

[4] BROGLIE L. DE. — *C. R. Acad. Sc.*, 1949, **229**, 157; 1949, **229**, 269; 1949, **229**, 401; 1949, **229**, 640; *Portugaliae Mathematica*, 1949, **8**, 37.

[5] BROGLIE L. DE. — Théorie générale des particules de spin quelconque, Gauthier-Villars, Paris, 1943.

[6] BROGLIE L. DE. — *C. R. Acad. Sc.*, 1936, **203**, 473.

[7] FRENKEL J. — *J. Phys. U. R. S. S.*, 1945, **9**, 1943.

[8] FERMI E. et YANG C. N. — *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 1739.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 12, ARVIL 1951, PAGE 516.

ÉTUDE DU SYSTÈME FORMÉ PAR LA RÉUNION DE DEUX CORPUSCULES DE DIRAC. [1]

Par MARIE-ANTOINETTE TONNELAT.

SOMMAIRE. — Après avoir formé l'équation que vérifie le système constitué par deux particules de Dirac, nous déterminons les solutions possibles dans le système propre. L'une des solutions décrit un état « singulet », l'autre un état « triplet ». On peut rattacher leur ensemble au cas de spin total 0 et 1.

Considérons à l'instant t deux particules de Dirac de même masse m_0 localisées en x_1, y_1, z_1 et en x_2, y_2, z_2. La fonction d'ondes $\psi_{ik}(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, t)$ du système formé par l'ensemble de ces deux particules obéit à l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\frac{\partial\psi_{ik}}{\partial t} = \Big[& a_1^{(1)}\frac{\partial}{\partial x_1} + a_1^{(2)}\frac{\partial}{\partial x_2} \\ & + a_2^{(1)}\frac{\partial}{\partial y_1} + a_2^{(2)}\frac{\partial}{\partial y_2} \\ & + a_3^{(1)}\frac{\partial}{\partial z_1} + a_3^{(2)}\frac{\partial}{\partial z_2} \\ & + \frac{2\pi i}{h} m_0 c (a_4^{(1)} + a_4^{(2)}) \\ & + \frac{2\pi i}{h}\sum_{j=0} c_j U_j\left(\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|\right)\Big]\psi_{ik}. \qquad (1)\end{aligned}$$

Les c_j sont des constantes qui introduisent les différents types d'interaction : scalaire (c_0), vectorielle (c_1), tensorielle (c_2), pseudovectorielle (c_3) et pseudoscalaire (c_4). On pose en effet :

$$\begin{aligned} U_0 &= U(|\vec{r}|)\,(a_4^{(1)} a_4^{(2)}), \\ U_1 &= U(|\vec{r}|)\left(1 - \vec{a}^{(1)}\,\vec{a}^{(2)}\right), \\ U_2 &= U(|\vec{r}|)\Big(i\vec{\sigma}^{(1)} a_4^{(1)}\, i\vec{\sigma}^{(2)} a_4^{(2)} \\ &\qquad - i\vec{a}^{(1)} a_4^{(1)}\, i\vec{a}^{(2)} a_4^{(2)}\Big) \\ U_3 &= U(|\vec{r}|)\left(i\vec{\sigma}^{(1)}\, i\vec{\sigma}^{(2)} - i a_5^{(1)}\, i a_5^{(2)}\right), \\ U_4 &= U(|\vec{r}|)\, a_5^{(1)} a_4^{(1)} a_5^{(2)} a_4^{(2)}, \end{aligned}$$

avec

$$\sigma_1 = a_2 a_3, \qquad \sigma_2 = a_3 a_1, \qquad \sigma_3 = a_1 a_2, \qquad a_5 = a_1 a_2 a_3.$$

Les a_μ modifient les indices des fonctions d'ondes ψ_{ik} suivant le schéma bien connu.

$$(a_\mu^{(1)})_{ik,lm} = (\alpha_\mu)_{il}\delta_{km}, \qquad (a_\mu^{(2)})_{ik,lm} = -(-1)^\mu(\alpha_\mu)_{km}\delta_{il},$$

les α_μ de Dirac ayant la forme habituelle. On retrouve naturellement l'hypothèse de Fermi [2] (interaction vectorielle) en annulant tous les c_i à l'exception de c_1.

Le changement de variables :

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad Y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad Z = \frac{z_1 + z_2}{2};$$

$$\xi = \frac{x_1 - x_2}{2}, \qquad \eta = \frac{y_1 - y_2}{2}, \qquad \zeta = \frac{z_1 - z_2}{2},$$

avec

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

[1] Depuis la rédaction de ce travail, nous avons eu connaissance de l'article de H. M. Moseley and N. Rosen « The Mesons as a composite particle » *Phys. Rev.*, 1950, 80, p. 177. Avec des notations et des préoccupations différentes des nôtres les auteurs partent de conceptions analogues à l'idée de base de ce travail. Le développement en est toutefois assez différent. L'article de MM. Moseley et Rosen possède bien entendu une large antériorité sur celui-ci.

(Note ajoutée à la correction des épreuves).

[2] E. FERMI et C. N. YANG, *Phys. Rev.*, 1949, **76**, p. 1739.

permet d'écrire (1) sous la forme suivante :

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\psi_{ik}}{\partial t} = \Bigg[\frac{a_1^{(1)}+a_1^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{a_2^{(1)}+a_2^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial Y} + \frac{a_3^{(1)}+a_3^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{a_1^{(1)}-a_1^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{a_2^{(1)}-a_2^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{a_3^{(1)}-a_3^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{2\pi i}{h} m_0 c (a_4^{(1)}+a_4^{(2)}) + \frac{2\pi i}{h}\sum_j c_j U_j(|\vec{r}|)\Bigg]\psi_{ik}. \quad (2)$$

Dans le système propre, c'est-à-dire dans le système lié au centre de gravité de la particule complexe, la fonction d'ondes ne dépend que de ξ, η, ζ et l'équation (2) se réduit à

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi_{ik}}{\partial t} = H^{(0)}\psi_{ik}^0, \quad (3)$$

avec

$$H^{(0)} = -i\hbar c \times \Bigg[\frac{a_1^{(1)}-a_1^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{a_2^{(1)}-a_2^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{a_3^{(1)}-a_3^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{2\pi i}{h} m_0 c (a_4^{(1)}+a_4^{(2)}) + \frac{2\pi i}{h}\sum_j c_j U_j(|\vec{r}|)\Bigg] \quad (4)$$

Soit W_0 un état d'énergie interne quantifié de la particule complexe correspondant à la masse propre $M_0 = \frac{W_0}{c^2}$. L'équation (3) s'écrit encore :

$$\Big[W_0 - c\sum_j c_j U_j\Big]\psi_{ik}^0 = -i\hbar c\Big[\frac{a_1^{(1)}-a_1^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{a_2^{(1)}-a_2^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{a_3^{(1)}-a_3^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial \zeta}\Big]\psi_{ik} + m_0 c^2 (a_4^{(1)}+a_4^{(2)})\psi_{ik}.$$

On constate que ces équations se scindent en deux groupes (I) et (II) :

$$(\mathrm{I})\begin{cases} 1^\circ & (W_0 + l\,Uc)\,I_1^{(0)} = 0, \\ 2^\circ & (W_0 - m\,Uc)\,I_2^{(0)} = 2 m_0 c^2 \sigma_4^{(0)}, \\ 3^\circ & (W_0 - n\,Uc)\,\sigma_4^{(0)} = -i\hbar c \operatorname{div}\vec{\sigma} + 2 m_0 c^2 I_2^{(0)}, \\ 4^\circ & (W_0 + s\,Uc)\,\vec{\sigma}^{(0)} = -i\hbar c\, \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\sigma_4; \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\begin{cases} 1^\circ & (W_0 + q\,Uc)\,\vec{H}^{(0)} = i\hbar c\, \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, E^{(0)}, \\ 2^\circ & (W_0 - r\,Uc)\,\vec{E}^{(0)} = -i\hbar c\, \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, H^{(0)} - 2 m_0 c^2 \vec{A}^{(0)}, \\ 3^\circ & (W_0 - s\,Uc)\,\vec{A}^{(0)} = i\hbar c\, \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, V^{(0)} - 2 m_0 c^2 \vec{E}^{(0)}, \\ 4^\circ & (W_0 + p\,Uc)\,V^{(0)} = i\hbar c \operatorname{div} \vec{A}^{(0)}; \end{cases}$$

en posant :

$$\begin{aligned} p &= c_0 - 4c_1 + 4c_3 + c_4 \\ q &= c_0 - 2c_1 - 2c_2, \\ r &= c_0 + 2c_1 - 2c_2 + 2c_3 - c_4, \\ s &= c_0 + c_4, \\ l &= c_0 + 2c_1 + 6c_2 + 2c_3 - c_4, \\ m &= c_0 - 2c_1 + 6c_2 - 2c_3 - c_4, \\ n &= c_0 + 4c_1 - 4c_3 + c_4, \end{aligned}$$

et en désignant par $I_1^{(0)}$, $I_2^{(0)}$, $\vec{\sigma}^{(0)}$, $\sigma_4^{(0)}$, $\vec{A}^{(0)}$, $V^{(0)}$, $\vec{E}^{(0)}$ et $\vec{H}^{(0)}$ les combinaisons linéaires suivantes des ψ_{ik}^0 :

$$\begin{aligned} I_1^{(0)} &= \psi_{11}^0 + \psi_{22}^0 + \psi_{33}^0 + \psi_{44}^0, \\ \sigma_1 &= \psi_{12}^0 + \psi_{21}^0 - \psi_{34}^0 - \psi_{43}^0, \\ \sigma_2 &= -i(\psi_{12}^0 - \psi_{21}^0 - \psi_{34}^0 + \psi_{43}^0), \\ \sigma_3 &= \psi_{11}^0 + \psi_{44}^0 - \psi_{22}^0 - \psi_{33}^0, \\ \sigma_4 &= \psi_{31}^0 - \psi_{13}^0 + \psi_{42}^0 - \psi_{24}^0, \\ I_2 &= \psi_{13}^0 + \psi_{31}^0 + \psi_{24}^0 + \psi_{42}^0, \\ A_1 &= \psi_{14}^0 - \psi_{41}^0 + \psi_{23}^0 - \psi_{32}^0, \\ A_2 &= i(\psi_{23}^0 + \psi_{32}^0 - \psi_{14}^0 - \psi_{41}^0), \\ A_3 &= \psi_{42}^0 - \psi_{24}^0 + \psi_{13}^0 - \psi_{31}^0, \\ E_1^{(0)} &= \psi_{41}^0 + \psi_{14}^0 + \psi_{23}^0 + \psi_{32}^0, \\ -iE_2^{(0)} &= \psi_{41}^0 - \psi_{14}^0 + \psi_{23}^0 - \psi_{32}^0, \\ E_3^{(0)} &= \psi_{13}^0 - \psi_{42}^0 + \psi_{31}^0 - \psi_{24}^0, \\ iH_1^{(0)} &= \psi_{12}^0 + \psi_{21}^0 + \psi_{34}^0 + \psi_{43}^0, \\ H_2^{(0)} &= -\psi_{12}^0 - \psi_{34}^0 + \psi_{21}^0 + \psi_{43}^0, \\ iH_3^{(0)} &= \psi_{11}^0 + \psi_{33}^0 - \psi_{22}^0 - \psi_{44}^0, \\ V^{(0)} &= \psi_{11}^0 + \psi_{22}^0 - \psi_{33}^0 - \psi_{44}^0. \end{aligned}$$

Si $c_1 = -1$, les autres c_i étant nuls (I) et (II) décrivent seulement une interaction vectorielle entre particules. Mais le fait important est que les équations de la particule complexe se partagent, dans le système propre, en deux groupes indépendants quel que soit le type d'interaction.

Considérons d'abord les équations (II) et cherchons une solution de ces équations de la forme (¹)

$$\vec{A} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\varphi,$$

(II_3) s'écrit alors

$$\vec{E} = -\frac{(W_0 - sUc)}{2 m_0 c^2}\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\varphi + \frac{i\hbar}{2 m_0 c}\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V.$$

En substituant dans (II_1) on trouve

$$\vec{H} = 0.$$

Avec une solution de la forme (9) les équations (II) s'écrivent donc :

$$(\mathrm{II}')\begin{cases} 1^\circ & \vec{H} = 0, \\ 2^\circ & \vec{E} = -\beta'\vec{A}, \\ 3^\circ & (W_0 - sUc - 2\beta' m_0 c^2)\vec{A} = i\hbar c\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V, \\ 4^\circ & \nabla V = \frac{-1}{\hbar^2 c^2}(W_0 + pUc)(W_0 - sUc - 2\beta' m_0 c^2)V, \end{cases}$$

en posant

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}, \qquad \beta' = \frac{2 m_0 c^2}{W_0 - rUc}.$$

Si l'on compare les équations (II′) avec les équations (I) écrites sous la forme suivante :

$$(\mathrm{I}')\begin{cases} I_1 = 0, \\ I_2 = \beta\sigma_4, \\ (W_0 + sUc)\vec{\sigma} = -i\hbar c\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\sigma_4, \\ \nabla\sigma_4 = \frac{-1}{\hbar^2 c^2}(W_0 + sUc)(W_0 - nUc - 2\beta m_0 c^2)\sigma_4, \end{cases}$$

(¹) Nous supprimons l'exposant ⁽⁰⁾ pour alléger l'écriture.

avec

$$\beta = \frac{2\, m_0 c^2}{W_0 - mUc},$$

on constate que les relations (I′) et (II′) ont même forme, $\vec{\sigma}$ et σ_4 jouant le rôle de $\vec{A}$ et de V. Par conséquent, si l'on choisit une solution $\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}\ \varphi$ les équations de la particule complexe se séparent en deux groupes admettant des solutions de même type. La quatrième équation du groupe (I′) s'écrit encore :

$$\nabla \sigma_4 = u^2 \sigma_4,$$

avec

$$u = \frac{i}{hc}(W_0 + sUc)^{\frac{1}{2}}(W_0 - nUc - 2\beta m_0 c^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Elle est satisfaite par

$$\sigma_4 = \frac{k_0}{r} e^{-ur} + \sum_p k_p\, \partial_p \left(\frac{1}{r} e^{-ur} \right),$$

en posant

$$\partial_p = \frac{\partial}{\partial u_p}, \qquad u_p = \xi,\ \eta,\ \zeta \qquad (p = 1, 2, 3).$$

σ_4 s'écrit encore :

$$\sigma_4 = \left[\frac{k_0}{r} - \frac{1}{r^2} \sum_p k_p u_p \left(\frac{1}{r} + u \right) \right] e^{-ur}, \tag{13}$$

et l'équation (I'_3) conduit à la valeur suivante de $\vec{\sigma}$:

$$\begin{aligned} \sigma_p &= -\frac{c}{\varkappa} \frac{1}{W_0} \partial_p \sigma_4 \\ &= \frac{c}{\varkappa} \frac{1}{W_0} \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{r} + u \right) \\ &\quad \times \left(k_0 u_p + k_p - \frac{3u}{r^2} u_p \sum_j k_j u_j \right) e^{-ur} \\ &\quad - \frac{c}{\varkappa} \frac{1}{W_0} \frac{u^2}{r^3} u_p \sum_j k_j u_j\, e^{-ur}. \end{aligned} \tag{14}$$

Revenons maintenant aux solutions exprimées sous forme de fonctions d'onde. Pour annuler toutes les grandeurs du groupe (II′) les ψ^0_{ik}, d'après (7), doivent être tels que

$$\left.\begin{aligned} &\psi^0_{14} = \psi^0_{23} = \psi^0_{32} = \psi^0_{41} = 0, \\ &\psi^0_{11} = -\psi^0_{22} = -\psi^0_{33} = \psi^0_{44}, \\ &\psi^0_{12} = -\psi^0_{34} \qquad \psi^0_{21} = -\psi^0_{43}, \\ &\psi^0_{13} = \psi^0_{24} \qquad \psi^0_{31} = \psi^0_{42}; \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

d'où l'on déduit, grâce à (8), (I'_3) et (I'_2) :

$$\psi^0_{11} = -\psi^0_{22} = -\psi^0_{33} = \psi^0_{44} = -\frac{1}{4}\sigma_3,$$

$$\psi^0_{12} = -\psi^0_{34} = \frac{1}{4}(\sigma_1 + i\sigma_2), \qquad \psi^0_{21} = -\psi^0_{43} = \frac{1}{4}(\sigma_1 - i\sigma_2);$$

$$\psi_{13} = \psi_{24} = \frac{1+\beta}{4}\sigma_4, \qquad \psi_{31} = \psi_{42} = -\frac{1-\beta}{4}\sigma_4.$$

Posons pour alléger l'écriture :

$$\left.\begin{aligned} F_0 &= -\frac{c}{4\varkappa} \frac{1}{W_0} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} + u \right) \left(k_0 - \frac{3}{r^2} \sum_j k_j u_j \right) e^{-ur} \\ &\quad \times e^{-ur} + \frac{c}{4\varkappa} \frac{1}{W_0} \frac{u^2}{r^2} \sum_j k_j u_j\, e^{-ur}, \\ F_p &= -\frac{c}{4\varkappa} \frac{1}{W_0} \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{r} + u \right) k_p\, e^{-ur} \qquad (p = 1, 2, 3), \\ F_4 &= \frac{1+\beta}{4}\sigma_4, \qquad F_5 = \frac{1-\beta}{4}\sigma_4. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

On a le tableau suivant :

$${}^1\psi^0_{ik} = \left| \begin{matrix} F_0 \frac{\zeta}{r} + F_3 & F_0 \frac{\xi + i\eta}{r} + (F_1 + iF_2) & F_4 & 0 \\ F_0 \frac{\xi - i\eta}{r} + (F_1 - iF_2) & -F_0 \frac{\zeta}{r} - F_3 & 0 & F_4 \\ -F_5 & 0 & -F_0 \frac{\zeta}{r} - F_3 & -F_0 \frac{\xi + i\eta}{r} - (F_1 + iF_2) \\ 0 & -F_5 & -F_0 \frac{\xi - i\eta}{r} - (F_1 - iF_2) & F_0 \frac{\zeta}{r} + F_3 \end{matrix} \right|. \tag{17}$$

La solution σ_4 que nous avons adoptée comprend deux sortes de termes : Le premier terme, qui dépend de k_0, correspond à un potentiel $\varphi = \frac{1}{r} e^{-ur}$ ayant la symétrie sphérique. Chacun des trois autres termes, en k_p, se rapporte à une doublet et dépend d'un potentiel $\varphi = \partial_p \left(\frac{1}{r} e^{-ur} \right)$. Si nous supprimions la solution en doublet, nous aurions simplement :

$$\psi^0_{ik} = \left| \begin{matrix} F_0 \frac{\zeta}{r} & F_0 \frac{\xi + i\eta}{r} & F_4 & 0 \\ F_0 \frac{\xi - i\eta}{r} & -F_0 \frac{\zeta}{r} & 0 & F_4 \\ -F_5 & 0 & -F_0 \frac{\zeta}{r} & -F_0 \frac{\xi + i\eta}{r} \\ 0 & -F_5 & -F_0 \frac{\xi - i\eta}{r} & F_0 \frac{\zeta}{r} \end{matrix} \right|$$

avec

$$F_0 = -\frac{c}{4\varkappa}\frac{1}{W_0}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}+u\right)k_0\, e^{-ur}.$$

$$F_4 + F_5 = \frac{1}{2}\frac{k_0}{r}e^{-ur}, \qquad F_4 - F_5 = \frac{m_0 c^2}{W_0 - 2cU}\frac{k_0}{r}e^{-ur}.$$

Ce sont les solutions ψ^0_{ik} proposées par Fermi, F_0, F_4, F_5 étant identiques aux fonctions f_3, f_4, f_1 de Fermi. L'écart entre le tableau des ψ^0_{ik} et celui de Fermi provient simplement d'une différence de numérotation qui disparaîtrait en multipliant les ψ^0_{ik} par α_2.

Considérons maintenant le groupe (II′). La quatrième équation

$$\nabla V = v^2 V, \tag{19}$$

avec

$$v = \frac{i}{\hbar c}(W_0 + pUc)^{\frac{1}{2}}(W_0 - sUc - 2\beta' mc^2)^{\frac{1}{2}} \tag{20}$$

admet une solution V de même forme que σ_4 :

$$V = \frac{k'_0}{r}e^{-vr} + \sum_p k'_p \partial_p\left(\frac{1}{r}e^{-vr}\right), \tag{21}$$

c'est-à-dire

$$V = \left[\frac{k'_0}{r} - \frac{1}{r^2}\sum_p k'_p u_p\left(\frac{1}{r}+v\right)\right]e^{-vr}. \tag{22}$$

D'après (II'_3) la forme du potentiel $\vec{A}$ est donc :

$$\begin{aligned} A_p &= -\frac{c}{\varkappa}\frac{1}{W_0 - 2\beta' m_0 c^2}\partial_p V \\ &= \frac{c}{\varkappa}\frac{1}{W_0 - 2\beta' m_0 c^2}\frac{1}{r^2} \\ &\quad\times\left[\left(\frac{1}{r}+v\right)\left(k_0 u_p + k_p - \frac{3u_p}{r^2}\sum_j k_j u_j\right) - \frac{v^2}{r}u_p\sum_j k_j u_j\right]e^{-vr}. \end{aligned} \tag{23}$$

Quant aux fonctions d'onde, les solutions doivent annuler toutes les grandeurs du groupe (I′) ainsi que $\vec{H}$. On doit avoir

$$\left.\begin{aligned} &\psi_{12} = \psi_{34} = \psi_{21} = \psi_{43} = 0, \\ &\psi^0_{11} = \psi^0_{22} = -\psi^0_{33} = -\psi^0_{44}, \\ &\psi_{31} = -\psi_{42} \qquad \psi_{13} = -\psi_{24}, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

d'où l'on déduit, d'après (8) et (II'_2)

$$\psi^0_{11} = \psi^0_{22} = -\psi^0_{33} = -\psi^0_{44} = \frac{1}{4}V.$$

$$\psi^0_{12} = \frac{1-\beta'}{4}(A_1 + iA_2), \qquad \psi^0_{23} = \frac{1-\beta'}{4}(A_1 - iA_2),$$

$$\psi^0_{32} = -\frac{1+\beta'}{4}(A_1 + iA_2), \qquad \psi^0_{41} = -\frac{1+\beta'}{4}(A_1 - iA_2),$$

$$\psi^0_{13} = -\psi^0_{24} = \frac{1-\beta'}{4}A_3, \qquad \psi^0_{31} = -\psi^0_{42} = -\frac{1+\beta'}{4}A_3.$$

Posons pour abréger :

$$\left.\begin{aligned} F'_0 &= -\frac{c}{4\varkappa}\frac{1+\beta'}{W_0 - 2\beta' m_0 c^2}\frac{1}{r} \\ &\quad\times\left[\left(\frac{1}{r}+v\right)\left(k'_0 - \frac{3}{r^2}\sum_j k'_j u_j\right) - \frac{v^2}{r}\sum_j k'_j u_j\right]e^{-vr}, \\ F'_p &= -\frac{c}{4\varkappa}\frac{1+\beta'}{W_0 - 2\beta' m_0 c^2}\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{r}+v\right)k'_p\, e^{-vr}, \\ F''_p &= F'_p\,\frac{1-\beta'}{1+\beta'}, \\ F'_4 &= \frac{1}{4}V \qquad F''_0 = F'_0\,\frac{1-\beta'}{1+\beta'}. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

On a le tableau suivant :

$$^{2}\psi^0_{ik} = \begin{vmatrix} F'_4 & 0 & F''_0\frac{\zeta}{r} + F''_3 & F''_0\frac{\xi+i\eta}{r} + F''_1 + iF''_2 \\ 0 & F'_4 & F''_0\frac{\xi-i\eta}{r} + F''_1 - iF''_2 & -\left(F''_0\frac{\zeta}{r} + F''_3\right) \\ F'_0\frac{\zeta}{r} + F'_3 & F'_0\frac{\xi+i\eta}{r} + F'_1 + iF'_2 & -F'_4 & 0 \\ F'_0\frac{\xi-i\eta}{r} + F'_1 - iF'_2 & -\left(F'_0\frac{\zeta}{r} + F'_3\right) & 0 & F'_4 \end{vmatrix}, \tag{26}$$

Les solutions $^{1}\psi^0_{ik}$ et $^{2}\psi^0_{ik}$ introduisent chacune quatre constantes arbitraires : k_0, k_1, k_2, k_3 et k'_0, k'_1, k'_2, k'_3. On peut choisir l'une ou l'autre de ces solutions qui se déduisent de deux systèmes équivalents et utiliser les quatre états quantiques normaux (k_0, k_p) de chacune d'elles pour définir une fonction d'onde à quatre indices privilégiés $\Phi^0_{ik}(x, y, z, t)$ $(ik) = 31, 32, 41, 42$.

Cette fonction décrit le mouvement du centre de gravité rapporté au système propre et obéit à l'équation

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi^0_{ik} = \frac{2\pi i}{h}M_0 c\,\frac{\alpha_4^1 - \alpha_4^2}{2}\Phi^0_{ik} \tag{27}$$

qui se déduit de l'équation générale de propagation de la particule de spin 1 dans un système quelconque. On se reportera au précédent article de M. Louis de Broglie pour l'établissement d'une telle correspondance. Mais, avec M. de Broglie, nous devons remarquer que ce travail montre seulement la possibilité de déterminer une solution Φ^0_{ik} des équations (27). En effet ces équations sont supposées valables *a priori* pour la particule de spin 1, et non pas déduites des équations du système formé par la réunion de deux corpuscules de Dirac [équations (1)]. Il existe là une solution de continuité entre les équations de la particule de spin 1 et les équa-

tions du système formé par deux particules de Dirac.

Quoi qu'il en soit, ce travail montre comment la solution proposée par Fermi se rattache aux équations d'onde et aux équations des champs et comment il est possible de la compléter.

Manuscrit reçu le [illegible].

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 12, AVRIL 1951, PAGE [illegible]

CHAMP COERCITIF DES POUDRES DE FERRO-NICKELS INFLUENCE DE LA COMPRESSION ET DU FRITTAGE

Par Louis WEIL.
Laboratoire d'Électrostatique et de Physique du Métal, Grenoble.

Sommaire. — On étudie entre [illegible] ferro-nickels à plus de [illegible] pour 100 de nickel, en fonction de la proportion de nickel. [illegible] le champ coercitif de presque tous les [illegible] l'anisotropie de forme [illegible].

On rend compte des écarts observés pour les [illegible] grains en contact [illegible] de la baisse du champ coercitif [illegible] la température [illegible] s'élève.

Le champ coercitif de poudres suffisamment fines pour ne former qu'un seul domaine élémentaire est dû à l'anisotropie de forme des grains, à leur anisotropie magnétique et à leur tensions internes intervenant par suite de la magnétostriction [1, 2, 3, 4, 5, 13]. Il est intéressant d'étudier une série de ferro-nickels entre 30 et 100 pour 100 de nickel : à température ordinaire l'anisotropie magnétique s'annule vers [illegible] pour 100 (fig. 1) et la magnétostriction vers [illegible] pour 100 ; de plus l'anisotropie

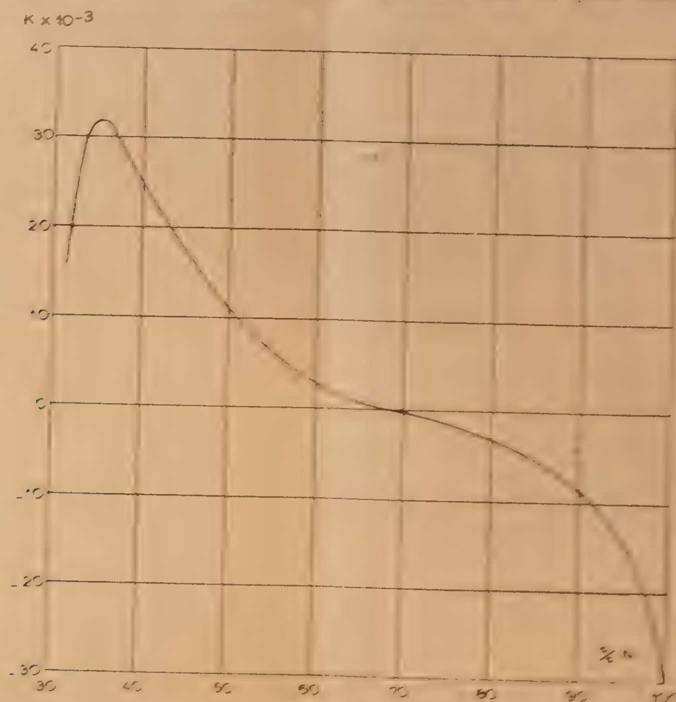
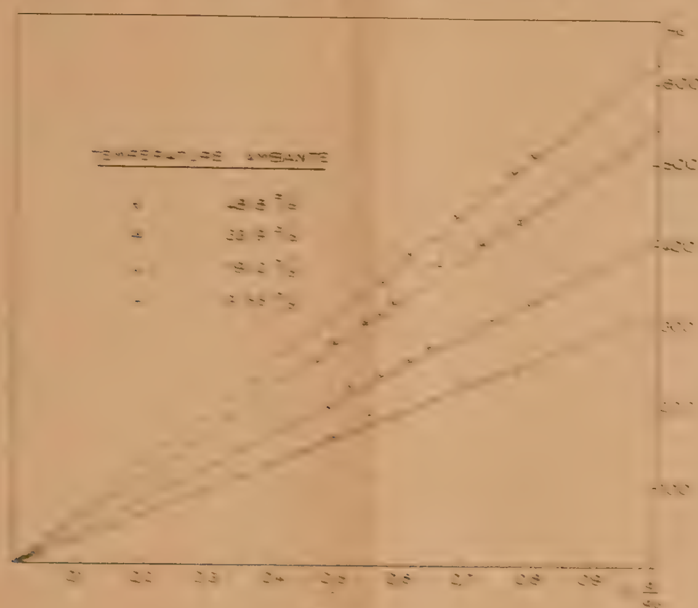
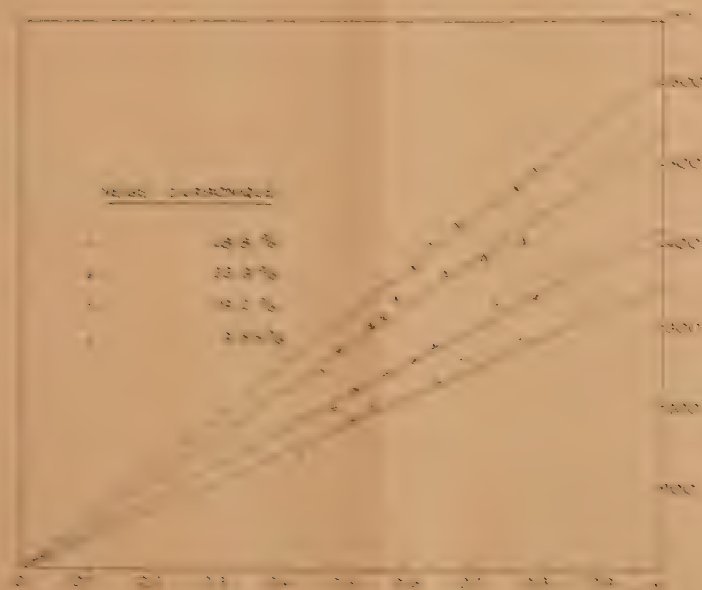


Fig. 1.


TEMPÉRATURE AMBIANTE



axe il trouve, dans le cas où la répartition en volume est linéaire en fonction de *M-N*

$$f(e) = 0.26\pi.$$

Cette valeur n'a de sens que pour des grains séparés. Mais comme le prévoit, par ailleurs, la théorie [1], le champ coercitif d'agglomérés varie linéairement en fonction de $1 - \frac{d}{d_0}$, d étant la masse de ferromagnétique par centimètre cube de l'aggloméré et d_0 la masse spécifique du ferromagnétique massif : par une extrapolation on peut donc déterminer la valeur de $f(e)$ [7, 8, 9] si l'on connaît $\mathfrak{J}$.

Pour des poudres ayant la même répartition de formes mais des saturations différentes, on doit trouver la même valeur de $f(e)$; nous avons donc préparé les poudres des différents alliages dans des conditions aussi identiques que possible. En faisant les mesures à diverses températures, nous avons pu isoler le rôle de l'anisotropie de forme. Enfin, les variations du champ coercitif après un frittage à 300° (température où nous avons également mesuré H_c) mettent en évidence les étapes du passage des grains isolés au ferromagnétique massif.

1. **Échantillons et mesures.** — Les poudres ont été obtenues par réduction dans l'hydrogène, à 320°, d'oxalates mixtes de fer et de nickel, titrant respectivement 9,55, 19,2, 33,9 et 48,8 pour 100 de fer; les points de fusion des quatre alliages étant voisins, les régles de correspondance de Tamann, Hüttiyg [10], etc. permettent de penser qu'à cette température la mobilité de leurs atomes est comparable et que, par suite, la répartition de forme des grains est semblable. Nous les avons comprimées sous des pressions allant de 0,5 à 6 t : cm² en forme de barreaux de 20 × 2 mm de section et de quelques millimètres d'épaisseur.

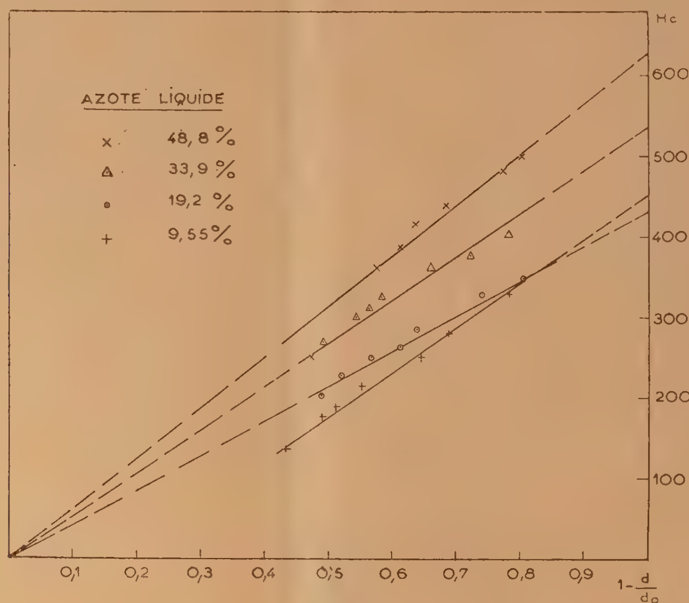


Fig. 4.

Nous avons déterminé leur volume, effectué les mesures magnétiques à température ordinaire, dans la neige carbonique et dans l'azote liquide puis repris leur volume après les mesures à 300°. Enfin, après avoir fait l'ensemble des déterminations de H_c relatées ci-dessus, nous avons chauffé les barreaux à 1000° dans l'hydrogène en vue de chasser toutes les impuretés et déterminé leur poids. Nous avons pu déterminer ainsi la valeur de d, masse de ferromagnétique par centimètre cube. De plus la mesure de l'aimantation à saturation, à température ordinaire, nous a permis, par confrontation avec les résultats obtenus par Peschard [11] sur une série d'alliages massifs de fer et de nickel, de vérifier la composition de nos échantillons. L'appareil de mesures magnétiques a été antérieurement décrit [12].

2. **Résultats des mesures avant chauffage à 300°.** — Les figures 2, 3 et 4 donnent les valeurs de H_c en fonction de $1 - \frac{d}{d_0}$ pour les quatre alliages étudiés, aux diverses températures. Pour les alliages à 19,2, 33,9 et 48,8 pour 100 de fer, à toutes les températures, pour l'alliage à 9,55 pour 100 à température ordinaire et —79° seulement, il y a proportionnalité entre le champ coercitif et la pro-

portion de vides $1 - \frac{d}{d_0}$. Le tableau ci-dessous donne les valeurs de H_c limite pour des grains infiniment dilués, les valeurs de l'aimantation $\mathcal{J}$ et de $\frac{H_c}{\mathcal{J}}$ à 13°.

Composition....	9,55	19,2	33,9	48,8
H_c limite.......	318	406	550	630
$\mathcal{J}$.............	652	847	1090	1270
$\frac{H_c}{\mathcal{J}}$...........	0,49	0,48	0,50	0,50

Pour la famille de poudres étudiée, la valeur de $f(e)$ de la théorie de Néel (*cf.* Introduction) serait donc de 0,5 au lieu de $0,26\,\pi = 0,82$. La répartition des formes serait plus proche de la sphère que dans l'hypothèse de travail admise.

Si le champ coercitif est dû seulement à l'anisotropie de forme, il doit prendre, à peu de chose près, la même valeur dans l'air liquide qu'à température ordinaire : d'après les mesures de Peschard $\mathcal{J}$ ne varie dans cet intervalle que de 3 à 6 pour 100. C'est effectivement ce qu'on observe, à la précision des extrapolations, pour les alliages à 19,2, 33,9 et 48,8 pour 100; ils obéissent d'ailleurs également à la loi de proportionnalité de H_c à $1 - \frac{d}{d_0}$ dans le

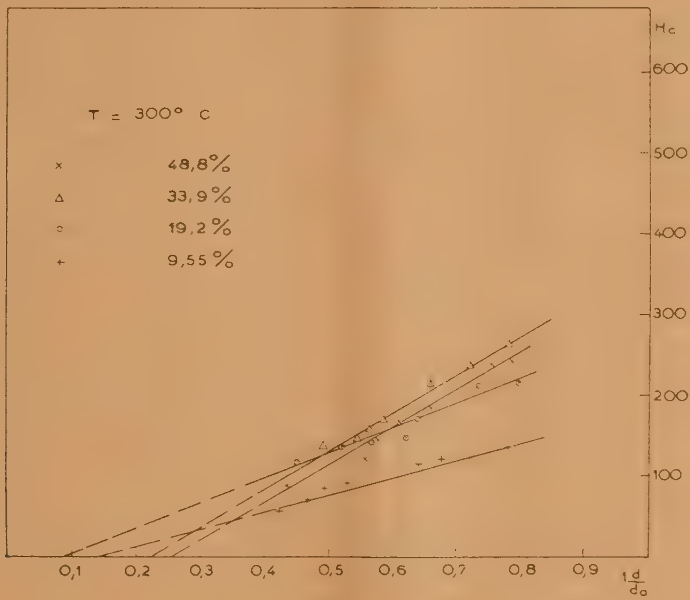


Fig. 5.

même intervalle. Pour ces trois alliages, le champ coercitif est donc dû *exclusivement* à l'anisotropie de forme.

Les valeurs de K pour les températures inférieures à l'ambiante n'ont pas été publiées. On sait que K reste nul vers 68 pour 100 et des résultats partiels (¹) indiquent une croissance en valeur absolue pour les autres concentrations. Pour le nickel à −193°, K est 10 fois plus grand qu'à température ordinaire; il n'y a donc rien de surprenant dans le fait que, pour l'alliage à 9,55 pour 100 on trouve, dès −79°, des valeurs de H_c supérieures à celles de l'ambiante pour un aggloméré donné. A plus forte raison, dans l'azote liquide, la contribution de l'anisotropie magnétique devient prépondérante et l'on n'a plus proportionnalité de H_c à $1 - \frac{d}{d_0}$. Une extrapolation vers la dilution infinie donnerait environ 460 contre 318 Oe à 13°.

3. **Résultats des mesures à 300° et après chauffage.** — Lorsqu'on porte un comprimé à 300°, il subit un certain nombre de transformations caractérisées par une diminution de volume (²), une diminution de résistance électrique, une modification des propriétés magnétiques qui indiquent un début de frittage.

Les valeurs de H_c à 300° (*fig.* 5) obéissent encore à une loi linéaire en fonction de $1 - \frac{d}{d_0}$, mais d'une part les droites représentatives ne passent plus par l'origine (0 pour 100 de vides) mais par un point correspondant à une proportion de vides plus

(¹) Communication de M. Bozorth.

(²) Des boursouflures, dues à des dégagements gazeux, peuvent simuler quelquefois une augmentation de volume.

élevée, d'autre part le champ coercitif limite pour la poudre infiniment diluée est nettement inférieur à

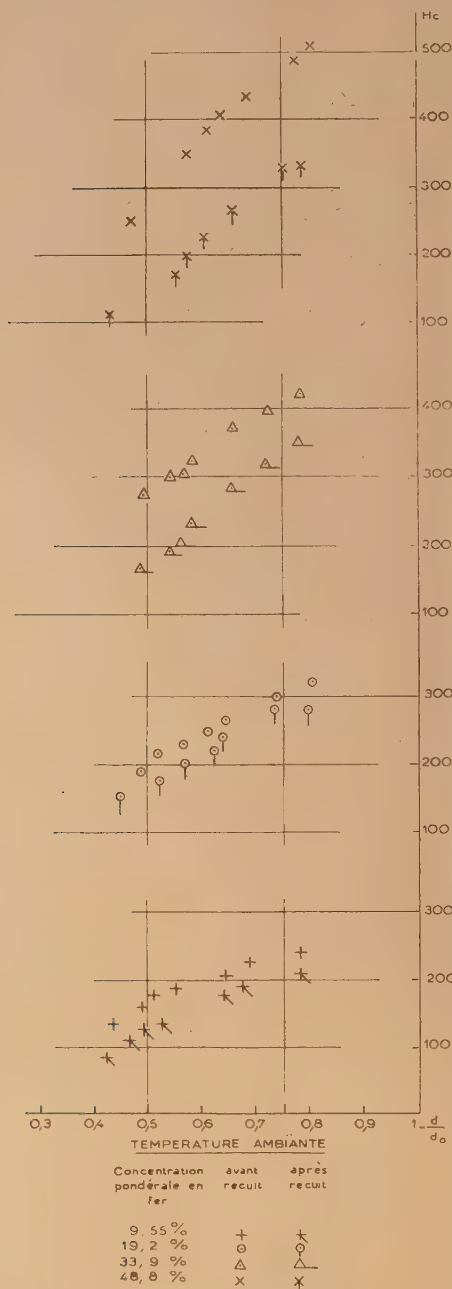


Fig. 6.

celui qu'on avait observé à température ordinaire (*fig.* 2); cette diminution peut en partie s'expliquer par la diminution de l'ordre de plus de 30 pour 100 subie par $\mathcal{J}$ au voisinage du point de Curie.

Ramenés à température ambiante, les échantillons ne retrouvent pas leur champ coercitif initial. Nous avons reporté figure 6 les valeurs avant et

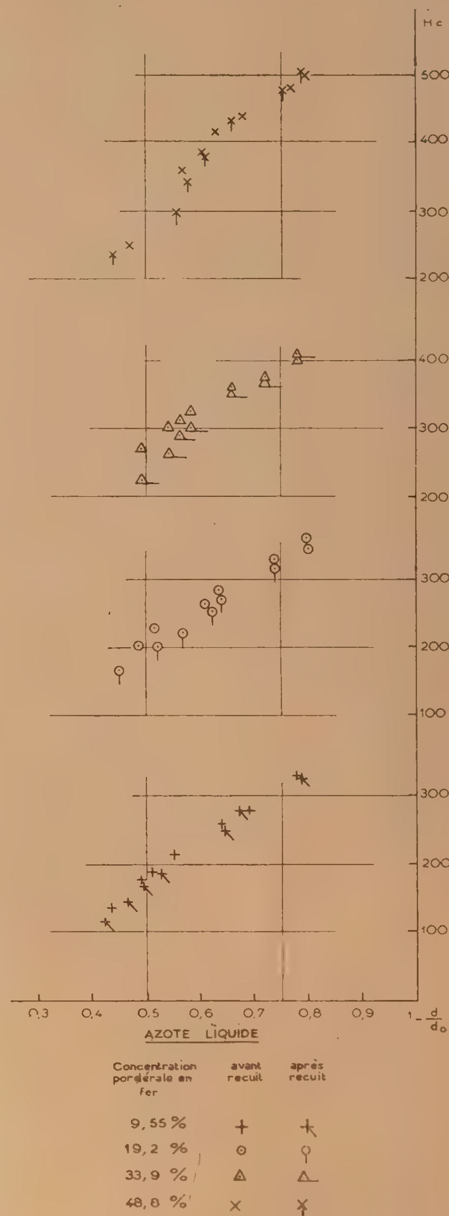


Fig. 7.

après chauffage. Tout se passe comme si les droites par lesquelles on peut représenter H_c en fonc-

tion de $1 - \frac{d_0}{d}$ étaient décalées vers la droite. Le tableau ci-dessous donne leurs abscisses à l'origine à 300° et à température ordinaire.

Composition.....	9,55	19,2	33,9	48,8
300°............	0,14	0,08	0,22	0,25
14°............	0,15	0,08	0,23	0,26

Tout se passe comme si le chauffage à 300° avait rendu *inefficaces* une certaine proportion des cavités. Nous verrons au paragraphe 4 comment à ce phénomène s'associe la baisse de champ coercitif limite constatée simultanément.

A l'azote liquide on trouve (*fig.* 7) des valeurs peu différentes de celles mesurées avant chauffage. Tout se passe comme si les trous inefficaces étaient devenus moins nombreux.

4. **Passage des grains isolés au ferromagnétique massif.** — Rappelons brièvement les idées admises aujourd'hui au sujet du frittage (20, par exemple) : la compression amène en contact les grains de poudre (*fig.* 8 *a*); lorsqu'on chauffe, le jeu combiné des forces d'attraction entre atomes et de l'agitation thermique entraîne la formation de ponts (*fig.* 8 *b*) qui se développent d'autant plus rapidement que la température est plus élevée; la forme générale du grain est conservée tant qu'on n'atteint pas la température de recristallisation.

Le pont n'est évidemment ferromagnétique qu'à partir d'une certaine dimension [5, 17], de l'ordre d'une dizaine d'angströms probablement; mais il constitue alors un *véritable élément de paroi de Bloch* où s'effectue progressivement le passage de la direction d'aimantation du grain A à la direction d'aimantation du grain B.

Entre les grains, de formes irrégulières, se forment plusieurs ponts. Si l'on se place au point de vue des parois, on peut dire inversement que la paroi de Bloch séparant les domaines élémentaires formés par les grains comporte plusieurs cavités séparées par des intervalles de l'ordre d'une dizaine d'angströms. Quant au diamètre des cavités, on peut admettre qu'il est de l'ordre d'une centaine d'angströms.

La paroi ne se déplace que dans un champ supérieur à un certain champ critique H que nous calculerons au paragraphe 5. Si H est supérieur au champ coercitif H_c des grains séparés, leur aimantation tourne avant que la paroi ne se soit déplacée et le champ coercitif observé pour l'amas est H_c. Si au contraire H est inférieur à H_c, les modifications d'aimantation de l'amas se font par déplacement de la paroi et le champ coercitif observé est H. H peut être notablement inférieur à H_c; sa valeur dépend de l'étendue des ponts.

On peut schématiser un aggloméré fritté par la figure 9. Les grains B, C et A sont simplement en contact; A est formé de deux parties séparées par une paroi de Bloch incluant les cavités β et γ. Des cavités telles que α restent efficaces pour la détermination du champ coercitif par la proportion de vides, alors qu'au contraire β et γ, qui ne séparent plus des grains indépendants sont devenus *inefficaces.*

En définitive, si dans le frittage à 300° la proportion globale des vides varie peu (moins de 1 pour 100 pour les échantillons peu comprimés, c'est-à-dire à forte proportion de vides, moins de 7 pour 100 pour les plus comprimés), la proportion des vides efficaces peut varier dans des limites bien plus larges, dépassant quelquefois 20 pour 100. L'aggloméré se comporte comme un mélange de grains à grand champ coercitif et d'amas à faible champ coercitif; il a donc un champ coercitif réduit.

Ce mécanisme rend compte des faits observés à 300° et à 14°. Il n'explique pas les mesures faites à l'azote liquide : nous allons donc examiner de plus près le mécanisme de déplacement d'une paroi.



Fig. 8. Fig. 9.

5. **Mécanisme de déplacement d'une paroi; le rôle des fluctuations.** — On sait depuis Kersten [14] que les cavités empêchent le libre déplacement des parois. Le mécanisme de ce freinage a été étudié en détail par Néel [15] dans le cas d'une paroi plane et de cavités réparties dans des plans puis [16] dans le cas d'une répartition statistique des cavités.

Les parois que nous envisageons ici peuvent être assimilées à des plans qui ne rencontrent qu'un seul plan contenant des cavités : ce schéma s'écarte peu de la réalité où la paroi est une surface plus ou moins compliquée rencontrant une surface contenant les cavités, surface ayant essentiellement (*fig.* 9 et § 4) la même forme. Nous pouvons donc appliquer la première théorie de Néel [15].

Le champ critique qu'il faut atteindre pour que la paroi quitte le plan des cavités est donné par la formule

$$H = 0{,}99\,\frac{\rho^3}{s^2}\sqrt{\frac{K}{E}}\;\frac{2K + \dfrac{4\pi\mathcal{J}^2 K}{E a^2}\rho^2}{\mathcal{J} a},$$

déduite du mémoire de Néel, où 2ρ est le diamètre des trous, s le diamètre des ponts, K la constante d'anisotropie, E l'énergie de désaimantation par centimètre cube, a le paramètre du réseau et $\mathcal{J}$ l'aimantation à saturation.

Pour une évaluation grossière, valable pour tous les alliages de la série, nous prendrons $K = 10^5$ (³),

(³) On n'obtient $K = 0$ que pour l'alliage à 68 pour 100 sans surstructure; or la finesse du grain favorise l'apparition de celle-ci [21].

$\mathcal{J} = 10^3$, $a = 3,5.10^{-8}$ et $E = 10^{10}$. Nous obtenons ainsi la relation

$$H = \frac{\rho^3}{s^2}(1,8.10^7 + 0,9.10^{19}\rho^2).$$

On voit tout de suite que lorsque s est petit, c'est-à-dire quand les ponts sont très réduits, ce champ critique est très grand; il n'y a pas déplacement des éléments de paroi avant la rotation d'ensemble de l'aimantation du grain et l'on mesure le champ coercitif dû à ce dernier phénomène.

Avec les dimensions proposées ci-dessus, on trouve pour H une valeur de l'ordre de 200 Oe, soit de l'ordre de grandeur du champ coercitif des poudres. Dans l'air liquide, étant donné qu'il varie comme $K^{\frac{3}{2}}$, il serait encore plus grand. *Les parois restent donc accrochées aux cavités* et les grains indépendants : c'est bien ce qu'on observe *dans l'azote liquide* où le champ coercitif est le même qu'avant frittage.

A température plus élevée et en particulier à la température ordinaire, pour nos échantillons, intervient de façon notable, ce que Néel [17, 18] appelle le mouvement brownien de la paroi : par suite de l'agitation thermique, la paroi peut franchir, dans un champ h inférieur au champ critique H que nous venons de calculer, les obstacles qui l'arrêtent. La constante de temps de ces passages est de la forme

$$\tau = C\,e^{\frac{v\mathcal{J}(H-h)^{\frac{3}{2}}}{3kTH^{\frac{1}{2}}}},$$

où C et v sont des constantes. Pour qu'une paroi paraisse exactement en équilibre sous l'effet d'un champ h (qui est alors le champ coercitif de l'amas de grains) il faut que τ soit de l'ordre de quelques secondes. Si T croît, ce qui entraîne d'ailleurs une diminution de H, la constante de temps diminue rapidement. Pour se replacer dans les mêmes conditions, c'est-à-dire observer le déplacement de la paroi au bout du même temps, il faut cette fois se placer dans un champ h bien plus faible. L'augmentation de température a pour effet de réduire *le champ coercitif apparent h* des amas de grains : *à température ordinaire le champ coercitif des agglomérés est plus faible* qu'avant frittage et certains trous sont devenus inefficaces.

6. **Conclusion.** — De l'ensemble des expériences relatées ci-dessus, on peut conclure que le champ coercitif des poudres de ferro-nickel contenant de 19 à 49 pour 100 de fer est dû uniquement à leur anisotropie de forme, entre 14 et — 193°.

Pour les alliages plus riches en nickel et à température suffisamment basse une contribution due à l'anisotropie magnétique apparaît.

Conformément à la théorie de Néel, tous les comprimés de poudres à faible anisotropie magnétique sont caractérisées d'une part par la loi de proportionnalité de H_c à la proportion de vides $1 - \frac{d}{d_0}$, d'autre part par le fait que le champ coercitif limite pour des grains isolés est proportionnel à l'aimantation, le coefficient numérique étant de l'ordre de grandeur prévu.

Ces lois simples ne sont plus vérifiées dès que les comprimés ont subi un début de frittage par suite d'un chauffage à 300°. On est conduit à admettre que dans ce cas certains grains ne sont plus magnétiquement isolés, mais forment des amas dans lesquels des parois peuvent se déplacer; ces déplacements, favorisés par l'agitation thermique, sont d'autant plus notables que la température est plus élevée; ce n'est qu'à basse température qu'on peut s'attendre à trouver le champ coercitif de grains isolés.

On explique également ainsi les expériences de Galt [19] qui pour un alliage à 32 pour 100 de fer, préparé comme les nôtres a trouvé une variation de 40 pour 100 de H_c entre la température ordinaire et l'air liquide : ses grains non comprimés ont à température ordinaire un champ coercitif de l'ordre de la moitié de celui que nous avons observé (478) et qui même dans l'air liquide reste encore inférieur aux valeurs que nous avons trouvées. C'est sans doute à un frittage survenu au cours des traitements de la poudre qu'il faut attribuer à la fois ces faibles valeurs de H_c et la variation anormale, parce que trop rapide en fonction de la température, qu'il avait observée. Les objections qu'il avait faites à la suite de ses expériences à la théorie même du champ coercitif des poudres fines semblent ainsi levées.

Manuscrit reçu le 13 octobre 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Néel L. — *C. R. Acad. Sc.*, 1947, **224**, 1550.
[2] Néel L. — *C. R. Acad. Sc.*, 1947, **224**, 1488.
[3] Guillaud C. — *J. Physique* 1947, **8**, 34 S.
[4] Stoner. — *Nature*, 1947, **160**, 650.
[5] Weil L. — *Rapp. Cong. Magnétisme*, Grenoble, 1950.
[6] Williams K. J. et Bozorth R. M. — *Phys. Rev.*, 1939, **55**, 673 A.
[7] Weil L. — *C. R. Acad. Sc.*, 1948, **227**, 1347.
[8] Weil L. — *C. R. Acad. Sc.*, 1947, **225**, 229.
[9] Weil L. — *Cong. Métal. des poudres*, Graz, 1948.
[10] Hüttiyg G. F. — *Archiv. f. Metallkunde*, 1948, **2**, 93.
[11] Peschard M. — *Rev. Metall.*, 1925, 605.
[12] Weil L. et Marfoure S. — *J. Physique*, 1947, **8**, 358.
[13] Kittel C. — *Rev. Mod. Phys.*, 1949, **21**, 541.
[14] Kersten M. — *Z. Physik*, 1948, **124**, 714 et *Phys. Z.*; 1943, **44**, 63.
[15] Néel L. — *Cahiers de Physique*, n° 25, 1944, 21.
[16] Néel L. — *Ann. Univ. Grenoble*, 1946, **22**, 299.
[17] Néel L. — *C. R. Acad. Sc.*, 1949, **228**, 1210.
[18] Néel L. — *J. Physique*, 1950, **11**, 60.
[19] Galt J. K. — *Phys. Rev.*, 1950, **77**, 845.
[20] Kieffer R. et Hotop W. — Trad. Naslin, Dunod Paris, 1947, 63-69.
[21] Weil L. — *C. R. Acad. Sc.*, 1947, **224**, 923.

SUR LES TRACES ISOLÉES PRODUITES PAR LES RAYONS COSMIQUES DANS LES ÉMULSIONS NUCLÉAIRES

Par Hassan MOUCHARRAFIEH et Simone REBAUD.

Sommaire. — Des considérations géométriques relatives aux émulsions nucléaires sont utilisées pour donner une méthode d'évaluation de l'intensité directionnelle des traces isolées produites par les rayons cosmiques.

Une application de cette méthode aux traces isolées se terminant dans l'émulsion donne une proportion de 9 pour 100 de mésons par rapport aux autres particules de $Z = 1$.

Une évaluation du spectre énergétique de l'ensemble des traces isolées permet de trouver une limite largement supérieure de la proportion des mésons aux autres particules de charge $Z = 1$: 5 pour 100. Ces résultats sont relatifs à une plaque $C_3 + B$ placée près de l'équateur et à 4500 m d'altitude.

On conclut que la dyssymétrie Est-Ouest observée sur les traces isolées dans les plaques nucléaires ne peut être confondue avec celle déjà étudiée au moyen des compteurs.

1. Données géométriques sur les traces isolées. — Une trace dans l'émulsion photographique peut être géométriquement caractérisée par l'angle β qu'elle fait avec sa projection sur le plan de vision du microscope et l'angle α que cette projection fait avec une direction donnée du plan de vision.

Pour la mesure de l'angle α, on utilise un rapporteur fixé sur l'oculaire du microscope et sur lequel un index se déplace entre la position correspondante à la projection de la trace sur le plan de vision et celle correspondant à la direction donnée dans ce plan.

L'angle β est déformé à cause de l'affaissement de l'émulsion au cours du fixage de la plaque. Si k est le coefficient d'affaissement, on a

$$\operatorname{tg}\beta = k\frac{\Delta z}{\Delta l},$$

où Δl est une longueur arbitraire sur la projection de la trace dans le plan de vision et Δz la différence des cotes entre ses deux extrémités.

Nous mesurons le coefficient k au moyen d'un micromètre Zeiss sensible au micron en déterminant aux mêmes points :

1° l'épaisseur du verre et de l'émulsion vierge;
2° l'épaisseur du verre et de l'émulsion fixée;
3° l'épaisseur du verre.

Les deux paramètres α et β déterminent complètement la direction d'une trace dans l'espace.

Cependant, pour étudier les effets directifs sur les traces isolées (calcul de l'intensité, dyssymétrie), il est nécessaire d'avoir une représentation sur un plan des directions des traces et des angles solides au moyen desquels on doit décomposer l'espace.

Représentation d'une direction. — Soit Δ une direction donnée de l'espace, nous traçons d'un point pris arbitrairement une demi-sphère Σ de rayon unité. Du centre de cette demi-sphère, nous menons une parallèle à la direction Δ qui coupe la demi-sphère en un point M : image de Δ. Si nous projetons la demi-sphère sur le plan équatorial suivant un cercle C, au point M correspond un point m. La correspondance entre la direction Δ de l'espace et le point m est biunivoque.

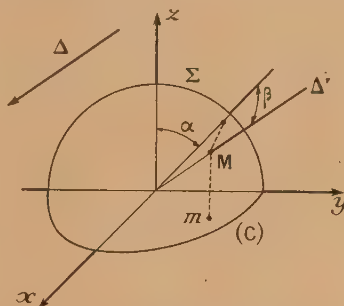


Fig. 1. — Représentation sur un plan d'une direction de l'espace.

Représentation d'un angle solide. — Étant donné un élément de surface $d\sigma$ et la normale N en son centre, les rayons qui coupent $d\sigma$ à l'intérieur d'un angle solide $d\Omega$ seront représentés sur la demi-sphère par des images M_i situées à l'intérieur d'une courbe Γ

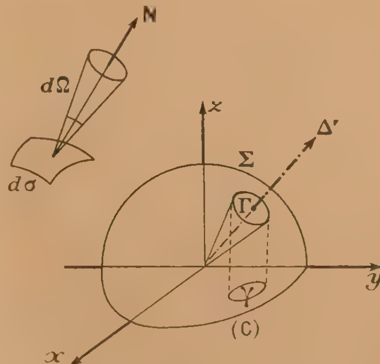


Fig. 2. — Représentation d'un angle solide $d\Omega$ autour d'une direction.

(intersection avec la demi-sphère du cône d'angle solide $d\Omega$ et d'axe parallèle à N) et sur le plan par des points m_i intérieurs à γ, projection de Γ.

La mesure de l'angle solide $d\Omega$ est alors donnée par l'aire de la surface comprise à l'intérieur de Γ sur la sphère. L'intensité I des particules dans un angle solide $d\Omega$ autour d'une direction Δ est donnée par

$$I = \frac{dN}{d\Omega\, dS\, dt},$$

où dN est le nombre de particules arrivant à l'intérieur de l'angle solide $d\Omega$ sur une surface dS normale à Δ pendant le temps dt. Dans le cas actuel, dS est l'aire de la projection normale à Δ du parallélipidède d'émulsion vierge. I s'exprime en centimètres^{-2} secondes^{-2} steradians^{-1}.

Calcul de l'intensité. — Pour avoir I, il suffit de calculer successivement l'angle solide $d\Omega$, la surface apparente d'émulsion vierge dS normale à la direction Δ, axe de l'angle solide $d\Omega$ et le nombre dN de traces arrivant à l'intérieur de $d\Omega$ sur dS.

Calcul des angles solides $d\Omega$. — Pour avoir des angles solides suffisamment petits nous divisons la surface de la demi-sphère Σ en éléments par un système de parallèles et de méridiens. Ces éléments sont tels qu'à chacun d'eux correspond un nombre similaire de traces. La solution pratique qui nous a donné satisfaction a consisté à diviser la demi-sphère Σ en zones correspondant à des angles zénithaux θ de 5, 15, 30, 50 et 70°, ces zones sont ensuite divisées, la première (0-5°), en quatre parties, la seconde (5-15°) en huit parties, la troisième (15-30°) en douze parties et les autres zones en seize parties, soit au total 72 éléments.

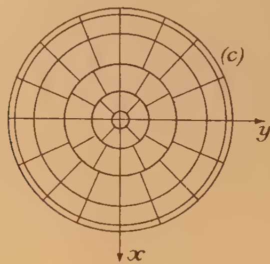


Fig. 3.

A chacun de ces éléments, correspond un angle solide $d\Omega$ donné en fonction de l'angle zénithal θ par

$$d\Omega_i = \frac{2\pi(\cos\theta_i - \cos\theta_{i-1})}{n},$$

où

$\theta_i = 0°,\ 5°,\ 15°,\ 30°,\ 50°,\ 70°,\ 90°;$
$n = 4,\ 8,\ 12,\ \text{ou}\ 16.$

Calcul de la surface apparente dS. — Si S_1 est l'aire de la face d'émulsion normale à Ox, S_2 l'aire de la face normale à Oy, S_3 l'aire de la face normale à Oz, la surface apparente S_i normale à une direction Δ_i caractérisée par les paramètres α et β définis ci-dessus est donnée par

$$S_i = S_1 \cos\left(\vec{\Delta}_i, \overrightarrow{Ox}\right) + S_2 \cos\left(\vec{\Delta}_i, \overrightarrow{Oy}\right) + S_3 \cos\left(\vec{\Delta}_i, \overrightarrow{Oz}\right).$$

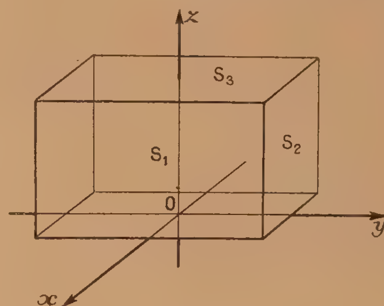


Fig. 4.

Nous n'avons pas calculé les surfaces apparentes correspondant à chacune des traces, mais nous avons, dans chacun des 72 éléments définis pour le calcul des angles solides $d\Omega_i$, choisi une direction moyenne D_i et déterminé la surface apparente dS par rapport à cette direction.

Le terme $S_3 \cos\left(\vec{\Delta}_i, \overrightarrow{Oz}\right)$ étant le même pour tous les éléments d'une même zone, et nos éléments étant symétriques par rapport aux axes Ox et Oy, aux 72 éléments correspondent seulement 18 valeurs différentes de dS.

Calcul du nombre de traces dN. — A chaque direction définie par les paramètres α et β correspond une image m dans le cercle C projection de la demi-sphère Σ sur le plan équatorial. Les coordonnées de ce point m sont données en fonction de α et β par

$$X = \sin\beta; \qquad Y = \cos\beta \sin\alpha.$$

Nous pourrons donc facilement déterminer les points m_i et le nombre dN de ces points dans chacun des 72 éléments définis précédemment.

Nous aurons ainsi toutes les données pour calculer I. Dans chaque élément nous avons déterminé l'intensité dans la direction moyenne D_i correspondant à chacun d'eux et pris la moyenne des valeurs de ces intensités pour une même zone. Nous avons alors obtenu la valeur de l'intensité en fonction des angles zénithaux.

Des applications de cette méthode sont faites dans la section 3 de la présente étude.

2. La dyssymétrie Est-Ouest sur les traces isolées. — Il y a déjà une quinzaine d'années, les mesures effectuées au moyen de compteurs montés en télescope ont révélé une dyssymétrie Est-Ouest dans la radiation cosmique. L'étude de cette dyssy-

métrie a été faite par plusieurs auteurs et approfondie par T. H. Johnson [1]. Plus récemment, des mesures minutieuses, faites par Biehl, Neher et Roesch [2] donnent pour la dyssymétrie Est-Ouest avec et sans absorbant, les valeurs données dans le tableau suivant :

Mètres d'eau.	Epaisseur d'absorbant (cm de Pb).	Dyssymétrie en (pour 100).
3,10	0	23,3±1,1
3,10	10	27,6±1,3
3,10	20	30,4±1,5
2,35	0	29,1±1,4
2,35	10	33,0±1,6
2,35	20	35,4±1,7

On voit que la dyssymétrie augmente avec l'altitude. Elle croît quand on arrête la composante molle (10-20 cm de Pb). Il s'ensuit qu'elle est due en majeure partie aux mésons.

Il était intéressant de savoir ce que donnerait la méthode de la plaque photographique pour l'étude de la dyssymétrie Est-Ouest. A cet effet M. le Professeur Morand a organisé une série d'expositions en divers points du globe :

	Altitude (m).	Latitude géomagnétique.
Kebnekaise	1 920	N 62°
Jungfraujoch	3 470	N 44
Hoggar	2 300	N 22
Costermansville	1 600	S 4
Karisimbi	4 500	S 3

Des résultats caractéristiques indiquant une dyssymétrie Est-Ouest sur les traces isolées ont été obtenus.

La comparaison de ces résultats montre que la valeur globale de la dyssymétrie observée sur plaques Ilford C_2 ou C_3 décroît rapidement quand l'altitude augmente, contrairement aux résultats obtenus au moyen des compteurs. De plus les compteurs sont sensibles à la radiation totale, qui est pratiquement constituée par des électrons et des mésons. D'après Rossi [3], les protons et éventuellement les deutérons et les tritons ne dépasseraient pas quelques pour mille de la radiation totale. Or les électrons ne sont pas visibles dans les plaques où la dyssymétrie a été observée sur les traces isolées et le nombre des mésons est très faible dans ces traces, puisqu'au delà de 5 MeV ils cessent d'être visibles.

En conséquence, la dyssymétrie étudiée à l'aide des compteurs ne peut apparaître sur nos traces au delà des fluctuations statistiques et encore moins expliquer les courbes de la figure 5.

Il semble donc qu'on soit devant un phénomène tout à fait différent et qui était difficile à détecter avant l'utilisation des émulsions nucléaires. Toutefois, il était nécessaire d'avoir une valeur limite exacte pour la proportion des mésons μ par rapport aux autres traces visibles dans les plaques photographiques considérées, pour savoir dans quelle mesure la dyssymétrie déjà observée avec les compteurs sur les mésons entre dans la dyssymétrie observée sur les traces isolées.

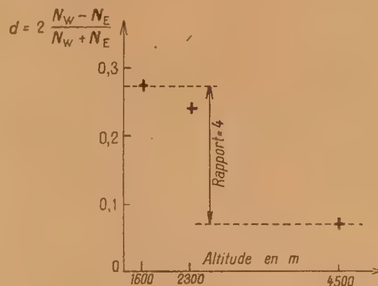


Fig. 5. — Dyssymétrie Est-Ouest sur les traces isolées en fonction de l'altitude.

3. Nature, intensité et spectre d'énergie des traces isolées. — Deux séries de mesures ont été faites sur la même plaque (Ilford C_3 + B, épaisseur d'émulsion vierge 240 μ, placée dans une boîte en aluminium d'épaisseur 0,3 mm, exposée verticalement au sommet du Karisimbi, Congo Belge, 4 500 m 3° latitude géométrique S, pendant 2 mois). La première porte sur les traces qui se terminent dans l'émulsion et la seconde sur l'ensemble de toutes les traces visibles.

A. Traces finissantes. — L'identification de ces traces peut être complète. Le sens de chaque

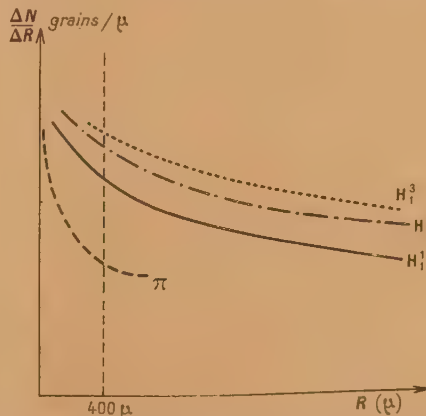


Fig. 6. — Courbes de granulation des mésons, protons, deutérons et tritons en fonction du parcours résiduel.

trace est parfaitement déterminé (sens de la granulation croissante). La variation de la granulation, en fonction du parcours résiduel, permet d'autre part de distinguer sans ambiguïté les mésons des autres particules plus lourdes. En effet, les courbes (*fig.* 6) montrent qu'à plus de 400 μ de sa fin, la granu-

lation d'un méson est moindre que la moitié de sa granulation maximum, alors que la décroissance

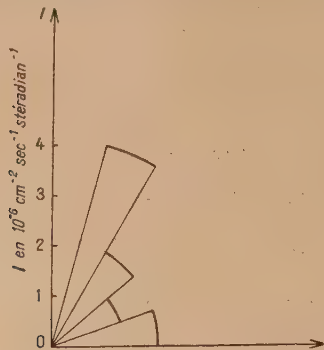


Fig. 7 *a*.— Spectre d'intensité des traces finissantes montantes.

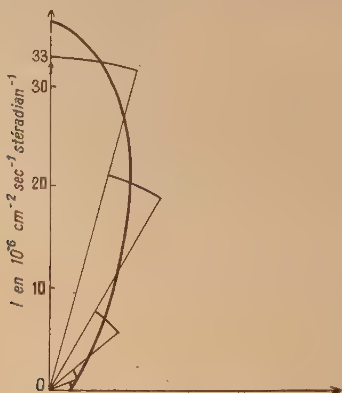


Fig. 7 *b*. — Spectre d'intensité des traces finissantes descendantes.

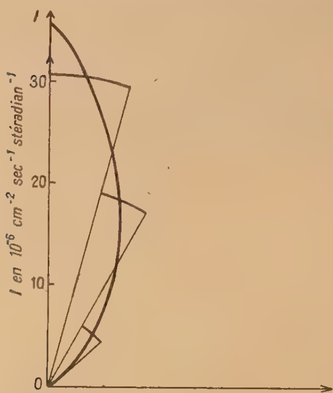


Fig. 7 *c*. — Spectre d'intensité des traces finissantes descendantes dont on a retranché les traces d'évaporation nucléaires.

de la granulation des particules plus lourdes est nettement moins sensible.

Toutes les traces finissant sur une surface dépouillée de 1,85 cm² ont été examinées systématiquement : sur 176 traces ainsi observées, 116 sont descendantes et parmi celles-ci se trouvent dix mésons certains et trois douteux à cause de leur faible longueur.

La méthode exposée dans la première partie, nous permet de déterminer I en fonction des angles zénithaux; nous obtenons les courbes suivantes (*fig.* 7) pour les traces respectivement montantes et descendantes.

Ces courbes ont été complétées par extrapolation pour les angles zénithaux compris entre 0 et 15°, le nombre de traces voisines de la verticale étant trop petit pour permettre de déterminer avec une bonne précision la valeur de l'intensité verticale (surface apparente trop faible).

On voit que la répartition des traces montantes (*fig.* 7 *a*) certainement d'évaporation nucléaire, est à peu près isotrope. Dans le spectre des traces descendantes, il doit y avoir une répartition analogue des traces d'évaporation nucléaire. L'intensité correspondant à des angles zénithaux voisins de 90° ne peut être due qu'à ces traces d'évaporation nucléaire et l'on peut les retrancher des autres traces descendantes, puisqu'elles ont une répartition isotrope (intensité comparable à celle des traces montantes). On obtient la courbe de la figure 7 *c*.

Nous retiendrons le rapport de 9 *pour* 100 *pour la proportion des mésons aux autres particules plus lourdes dans les traces descendantes qui se terminent dans l'émulsion.*

B. Traces traversant l'émulsion. — Nous avons pointé toutes les traces visibles sur une surface de 0,43 cm² à la partie supérieure de la plaque, soit 396 traces.

Ici les traces montrent, pour la grande majorité, une ionisation pratiquement constante. Le sens n'est donc pas fixé, mais l'énergie des particules étant en moyenne bien supérieure à celle des traces finissantes (à cause même de la faible décroissance de l'ionisation), *les traces descendantes sont certainement de loin les plus nombreuses.*

Nous supposerons, à défaut de critère sûr pour le sens, que toutes les traces sont descendantes. On verra plus loin d'ailleurs, comment on peut évaluer la proportion des traces montantes.

Le spectre d'intensité pour les 396 traces pointées est le suivant (voir *fig.* 8 *a* et *b*) :

Comme nous l'indiquions dans le cas des traces finissantes, l'intensité des traces montantes est donnée par la valeur de l'intensité correspondant à un angle zénithal de 90°. La courbe en pointillé (*fig.* 8 *b*) donne le spectre d'intensité des traces autres que les traces d'évaporation nucléaire.

Nous remarquons en passant, que le spectre d'intensité des traces traversant l'émulsion est plus aplati vers la verticale que celui des traces finissantes. La raison en est qu'un grand nombre de

traces rapides correspondant à des angles zénithaux assez faibles ne sont pas suffisamment inclinées pour être visibles.

Une confirmation de cette explication est donnée

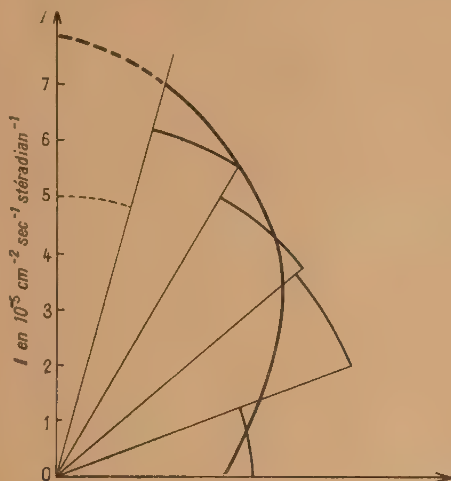


Fig. 8 *a*. — Spectre d'intensité des traces isolees.

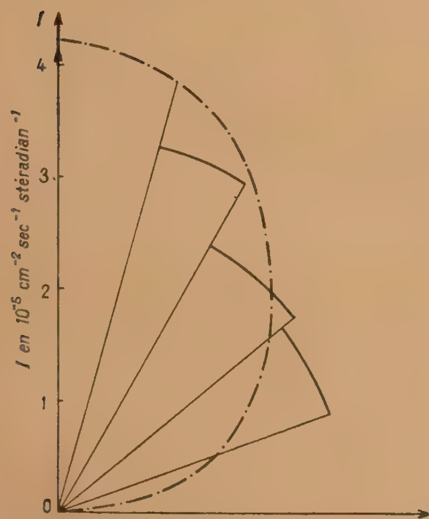


Fig. 8 *b*. — Spectre d'intensité des traces isolées dont on a retranché les traces d'évaporation nucléaire.

par des mesures faites par C. Beets et M. Morand [4] sur une plaque Ilford G_5 dans les mêmes conditions expérimentales. Le spectre obtenu est donné figure 9.

Reste à identifier les traces. A première vue, les mésons ne se distinguent pas immédiatement des autres traces. Nous allons montrer néanmoins comment nous avons réalisé cette distinction d'une façon sure.

Comme les traces ne se terminent pas dans l'émulsion, nous avons l'un des cas suivants :

1° La trace du méson est coupée à moins de 150 μ de sa fin. Dans ce cas, le parcours qu'il a dans l'émulsion étant au minimum de 250 μ (épaisseur de l'émulsion vierge), sa granulation varierait entre ses extrémités dans le rapport de 1 à 2. Cette variation est un critère assez sûr pour déceler le méson;

2° La trace du méson est coupée à plus de 150 μ de sa fin. Dans ce cas, la variation de granulation n'est plus très sensible entre les deux extrémités de la trace, comme précédemment. Mais elle ne devrait pas dépasser, à l'entrée dans l'émulsion 20 grains par 85 μ. De telles traces sont rares dans notre plaque $C_3 + B$. Nous en avons trouvé 5 sur 396

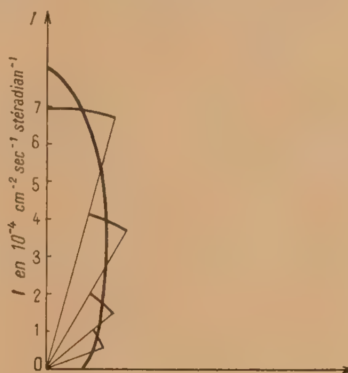


Fig. 9. — Spectre d'intensité des traces isolées observées dans une plaque G_5.

sur lesquelles il y a certainement d'autres particules que des mésons.

En définitive et dans tous les cas, le risque pour que la trace d'un méson soit confondue avec celle d'autres particules dans une plaque $C_3 + B$ *ne dépasse pas* 1 *pour* 100.

Calcul de l'énergie. — La distinction entre les mésons et les autres particules étant faite, il s'agit d'assigner une énergie à une trace présentant une granulation donnée.

Lattes et al. [5] ont montré que l'énergie d'un proton est une fonction du parcours résiduel de la forme

$$E(\text{MeV}) = kR^n\,(\text{microns}),$$

l'exposant n pouvant être déterminé dans le cas de l'émulsion considérée. Ici, $n = 0{,}56$ et $k = 0{,}25$.

En différentiant, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}R} = k\,n\,R^{n-1} = n\,\frac{E}{R};$$

d'où

$$E = \left[\frac{1}{kn^n}\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}R}\right)^n\right]^{\frac{1}{n-1}},$$

soit

$$E = 8{,}4\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}R}\right)^{-1{,}28}. \qquad (1)$$

On voit donc comment on peut déterminer E connaissant $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}R}$. Mais la perte d'énergie $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}R}$ n'est pas connue directement dans la méthode de la plaque photographique. Par contre on connaît $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}R}$, où N est le nombre de grains et R le parcours résiduel.

Van Rossum [6] a montré qu'on peut établir une relation entre $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}R}$ et $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}R}$ Elle est de la forme

$$\mathrm{Log}\left(1 - \frac{1}{c}\,\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}R}\right) = -b\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}R}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Les constantes b et c ont dans la plaque étudiée les valeurs $b = 0{,}435$ et $c = 1{,}66$.

Cette relation nous permet, étant donné un dN déterminé expérimentalement sur un dR choisi arbitrairement, de lui faire correspondre un $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}R}$ et, d'après l'expression (1), une énergie E. Cette correspondance est résumée dans le tableau suivant établi pour d$R = 85\,\mu$:

E (MeV)....	60.	50.	40.	30.	20.	10.	5.
$\frac{\mathrm{d}N}{85\,\mu}$	16	21	28	38	54	77	93

Détermination du spectre d'énergie. — Pratiquement pour chacune des traces pointées traversant l'émulsion, nous avons compté le nombre de grains sur 85 μ de longueur vraie dans l'émulsion vierge prise sur la trace à son entrée dans la plaque. Ce nombre est calculé en tenant compte de l'inclinaison de la trace dans l'émulsion.

Nous avons ainsi pu fixer l'énergie des traces dans l'un des intervalles 0-10, 10-20, ..., 50-60 MeV. 60 MeV étant la limite d'énergie d'un proton visible dans une plaque $C_3 + B$.

Pour les 394 traces reconnues comme n'étant certainement pas des mésons, nous avons obtenu le spectre d'énergie suivant :

L'assignation d'une énergie à une granulation donnée $\left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}R}\right)$ faite ci-dessus suppose implicitement l'assimilation de toutes les traces autres que les mésons à des protons. C'est une approximation un peu grossière, mais qui est légitimée du fait de la faible proportion des deutérons et des tritons par rapport aux protons, signalés par plusieurs auteurs. M. Morand et al. [7] ont obtenu, par exemple, pour des traces finissantes : 18 deutérons et 3 tritons pour 100 protons.

Discussion. — Le spectre représenté sur la figure 10 est celui de l'ensemble des particules de charge $Z = 1$ (protons, deutérons, tritons), puisque les mésons ont été éliminés au préalable et que les particules de $Z \geq 2$ ont des traces épaisses caractéristiques dans notre émulsion. Sous cette forme, il peut

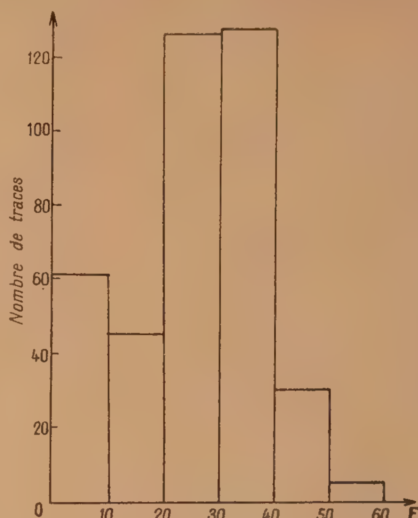


Fig. 10. — Spectre d'énergie des particules de $Z = 1$ autres que les mésons.

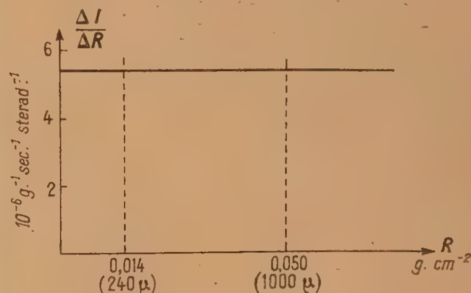


Fig. 11 *a*. — Spectre différentiel d'énergie des mésons de faible énergie en fonction du parcours résiduel.

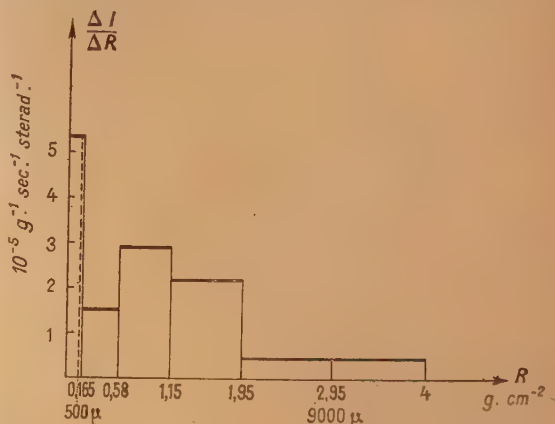


Fig. 11 *b*. — Spectre d'énergie différentiel des particules $Z = 1$ autres que les mésons. — *a*. Spectre d'énergie différentiel des mésons de faible énergie.

nous servir à évaluer avec précision la proportion des mésons à l'ensemble des traces visibles.

En effet du spectre énergétique des particules autres que les mésons, on peut tirer le spectre différentiel correspondant en fonction du parcours $\frac{dI_p}{dR} = f_p(R)$, où I_p est l'intensité des particules de charge $Z = 1$ autres que les mésons, en utilisant la relation $E = kR^n$ liant le parcours à l'énergie.

Il est intéressant de comparer ce spectre à celui des mésons lents $\frac{dI_m}{dR} = f_m(R)$ (I_m étant l'intensité des mésons) obtenu en extrapolant aux très faibles énergies les courbes de Rossi [8]. En fait ces courbes ont été établies pour l'intensité verticale des mésons, mais pour les très faibles énergies qui nous intéressent $E \leq 5$ MeV ($R \leq 1000\,\mu$ ou $0{,}05$ g : cm^{-2}) le scattering rend très plausible une répartition descendante presque isotrope.

A une direction donnée de l'espace $\Delta = \Delta(\alpha, \beta)$, correspond une longueur λ de parcours dans l'émulsion qui dépend uniquement de α et de β et des dimensions de la couche sensible.

Soit un flot de particules de nature déterminée (protons, par exemple) dont l'intensité dans la direction Δ est une fonction connue $I = I(\alpha, \beta)$. La connaissance de cette fonction de distribution $I(\alpha, \beta)$ permet de trouver une valeur moyenne $\bar{\lambda}$ pour toutes les longueurs λ et pour l'ensemble des directions de l'espace

$$\bar{\lambda} = \frac{\Sigma\lambda(\alpha, \beta).I(\alpha, \beta)}{\Sigma I(\alpha, \beta)}.$$

Il est évident que pour différentes particules, la fonction de distribution $I(\alpha, \beta)$ et par suite $\bar{\lambda}$ ont des valeurs différentes. Nous appellerons $\bar{\lambda}_p$ et λ_m les valeurs de $\bar{\lambda}$ correspondant respectivement aux protons et aux mésons.

On peut évaluer λ_p sur les 394 traces identifiées comme n'étant pas des mésons en utilisant pour le calcul de l'intensité $I_p(\alpha, \beta)$ la méthode esquissée dans la première partie de cet article.

On trouve $\lambda_p \cong 500\,\mu$.

Quant à λ_m, le nombre de mésons est trop petit pour en permettre une évaluation expérimentale précise. Comme l'épaisseur de notre émulsion est de $240\,\mu$, on a sûrement

$$\bar{\lambda}_m > 240\,\mu.$$

Les protons finissants sont ceux dont le parcours résiduel R_p est inférieur à λ_p.

$$R_p \quad \lambda_p.$$

Pour un parcours résiduel supérieur à $9\,000\,\mu$ ou $2{,}95$ g : cm^{-2} les protons cessent d'être visibles dans notre émulsion. La fraction de l'intensité des protons finissants à celle de l'ensemble des protons visibles est donc

$$\frac{\int_0^{\bar{\lambda}_p} \left(\frac{dI_p}{dR}\right) dR}{\int_0^{9000\,\mu} \left(\frac{dI_p}{dR}\right) dR} = K_p.$$

De même les mésons finissants ont un parcours résiduel $R_m \leq \bar{\lambda}_m$. Les mésons cessant d'être visibles à $1\,000\,\mu$ ($0{,}05$ g : cm^{-2}) la fraction de l'intensité des mésons finissants à celle de l'ensemble des mésons visibles est donc

$$\frac{\int_0^{\lambda_m} \left(\frac{dI_m}{dR}\right) dR}{\int_0^{1000\,\mu} \left(\frac{dI_m}{dR}\right) dR} = K_m.$$

Les figures 11 *a* et *b* donnent :

$$K_m > 0{,}24$$

puisque $\bar{\lambda} > 240\,\mu$

$$K_p = 0{,}13.$$

L'étude des traces finissantes (section 3 A) nous donnait 9 pour 100 comme proportion des mésons aux autres particules. L'étude des spectres (*fig.* 11*a* et *b*) nous permet de passer à *une limite supérieure de la proportion des mésons à l'ensemble des traces visibles*, soit :

$$\frac{9}{100} \times \frac{K_p}{K_m} \quad \text{ou} \quad \frac{9}{100} \times \frac{13}{24} \cong 5 \text{ pour } 100.$$

Remarquons enfin que l'assimilation des deutérons et tritons aux protons a eu pour effet d'augmenter K_p. Le chiffre de 5 pour 100 est donc une limite très supérieure.

Cette proportion est caractéristique de ce genre de plaques. Pour des plaques plus sensibles, le seuil de visibilité étant plus éloigné, beaucoup plus de mésons sont visibles et la proportion peut se modifier.

5. **Conclusion.** — De cette étude, il ressort que :

1° Les traces isolées ne sont pas uniquement dues comme on l'a cru précipitamment — à des branches d'étoiles d'évaporation nucléaire dont les sommets sont hors de l'émulsion car ces branches auraient une distribution statistiquement isotrope et l'on s'interdirait alors d'expliquer l'effet directif observé sur les traces isolées.

2° Ces traces ne sont pas des sections de mésons μ. Ceux-ci ne dépassent certainement pas 5 pour 100 de l'ensemble des traces visibles dans une plaque $C_2 + B$.

3° La dyssymétrie observée sur ces traces, n'est pas celle déjà observée au moyen de compteurs. Son origine doit être recherchée en tenant compte de la composante nucléonique rapide du rayonnement cosmique.

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure, sous la direction de M. Max Morand, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris (Physique-Enseignement).

L'un de nous (H. M.) tient à remercier vivement le Gouvernement Libanais de lui avoir accordé une bourse, grâce à laquelle ce travail a pu être réalisé.

Nous devons à M. le Professeur Morand de nous avoir initiés aux recherches scientifiques. Nous sommes heureux de lui exprimer ici notre gratitude pour les conseils qu'il nous a prodigués tout au long de ce travail.

Nous remercions nos camarades du laboratoire pour maintes discussions profitables.

Manuscrit reçu le 26 juillet 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] JOHNSON T. H. — *Phys. Rev.*, 1933, **43**, 381.

[2] BIEHL A. T., NEHER H. V. et RŒSCH W. C. — *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 914.

[3] ROSSI B. — *Rev. Mod. Phys.*, 1948, **20**, 542.

[4] BEETS C. et MORAND M. — Communication personnelle.

[5] LATTES C. M. G. et CAMERINI, cité par FRANZINETTI C. — *Phil. Mag.*, 1950, **7**, 86.

[6] VAN ROSSUM L. — *J. Phys.*, 1949, **10**, 402.

[7] MORAND M., VAN ROSSUM L., BEETS C. et JANNOT M. — *Congrès de Côme*, 1949.

[8] ROSSI B. — *Rev. Mod. Phys.*, 1948, **20**, 545.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 12, AVRIL 1951, PAGE 534.

LES MÉTHODES COVARIANTES DE MÉCANIQUE ANALYTIQUE EN THÉORIE GÉNÉRALE DES CHAMPS, LINÉAIRES OU NON

Par BERNARD KWAL.
Institut Henri Poincaré, Paris.

Sommaire. — On part d'un lagrangien scalaire quelconque, qui dépend des champs, fonctions, en général complexes, des points de l'espace-temps.

Dans la première Partie du travail, ces fonctions ont la variance tensorielle, tandis que dans la seconde, elles ont la variance spinorielle. L'emploi de la notation de Van der Waerden permet d'ailleurs de faire calquer la théorie, relative aux champs spinoriels, sur celle, relative aux champs tensoriels.

Comme les champs complexes peuvent jouer le rôle des champs des corpuscules chargés, nous introduisons d'une manière habituelle, le champ dit extérieur ou d'interaction. Ceci nous conduit à étudier l'invariance de jauge et de phase et à définir un vecteur conservatif : « la densité de charge et de courant ».

Le fait d'envisager une fonction lagrangienne quelconque, qui n'est pas nécessairement bilinéaire en champs, nous oblige à faire la distinction, comme en théorie non linéaire de Born du champ électromagnétique, entre les champs primaires qui figurent dans le lagrangien, et les champs secondaires, dits de polarisation. Les équations d'Euler-Lagrange ne font intervenir que les champs de polarisation, mais il est possible d'intervertir les rôles, joués par les champs primaire et secondaire, grâce à l'emploi d'un lagrangien réciproque.

La poursuite conséquente des méthodes de Mécanique analytique nous conduit à introduire un hamiltonien scalaire, ce qui permet de donner aux équations canoniques une forme particulièrement simple. Mais le tenseur d'énergie du champ est également étudié. Il permet aussi de faire revêtir aux équations du champ la forme canonique du champ, mais d'une manière relativement compliquée.

Nous ramenons également l'étude des équations du champ à celle d'une équation aux dérivées partielles du type de Hamilton-Jacobi, où figure une divergence d'une fonction à variance vectorielle. Nous sommes amené d'ailleurs à la même équation, en considérant les transformations canoniques.

Ainsi, toutes les méthodes traditionnelles de la Mécanique analytique, peuvent être introduites d'une manière absolument covariante, en théorie, en général non linéaire, des champs complexes, de variance tensorielle ou spinorielle.

1. Les équations que nous allons étudier se déduiront d'un principe variationnel dont la fonction lagrangienne $\mathcal{L}$ va dépendre, soit des grandeurs tensorielles q_j et q_{jk} ($j, k = 1, 2, 3, 4$) soit des grandeurs spinorielles ξ_α, η^β ($\alpha, \beta = 1,2$), (la lettre β correspond à la lettre pointée de la notation spinorielle de Van der Waerden). Nous allons convenir d'écrire ∂_k pour $\frac{\partial}{\partial x_k}$, ∂_t pour $1/c\,\frac{\partial}{\partial_t}$

$$\partial^{\beta\alpha} \quad \text{pour} \quad \begin{vmatrix} \partial_t - \partial_3 & \partial_1 + i\,\partial_2 \\ \partial_1 - i\,\partial_2 & \partial_t + \partial_3 \end{vmatrix}$$

et

$$\partial_{\alpha\beta} \quad \text{pour} \quad \begin{vmatrix} \partial_1 + \partial_3 & -(\partial_1 + i\,\partial_2) \\ -(\partial_1 - i\,\partial_2) & \partial_1 - \partial_3 \end{vmatrix}.$$

En présence d'un champ extérieur, défini par le potentiel-vecteur $\mathcal{A}_k$, nous poserons

$$\mathcal{D}_k = \partial_k + \varepsilon\mathcal{A}_k, \qquad \mathcal{D}_k^* = \partial_k - \varepsilon\mathcal{A}_k,$$
$$\mathcal{D}_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha\beta} + \varepsilon\mathcal{A}_{\alpha\beta}, \qquad \mathcal{D}_{\alpha\beta}^* = \partial_{\alpha\beta} - \varepsilon\mathcal{A}_{\alpha\beta};$$

ε étant une constante purement imaginaire $\left(\varepsilon = \pm\dfrac{ie}{\hbar c}\right)$.

2. **Les équations des champs tensoriels.** — Considérons une fonction lagrangienne réelle

$$\mathcal{L}(q_j, q_j^*; p_{l,j}, p_{l,j}^*) \tag{2.1}$$

du champ tensoriel complexe q_j (q_j^* = complexe conjugué de q_j) le symbole q_j pouvant représenter une grandeur tensorielle à plusieurs indices $q_{j_1, j_2, \ldots, j_m}$ quant au symbole $p_{l,j}$, il représente la forme différentielle suivante :

$$p_{l,j} = \mathcal{D}_l q_j, \qquad p_{l,j}^* = \mathcal{D}_l^* q_j^*. \tag{2.2}$$

En ayant soin de noter que l'on a

$$\frac{d\mathcal{L}}{dq_j} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial p_{l,k}}\frac{\partial p_{l,k}}{\partial q_j} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j} + \varepsilon\mathcal{A}_l\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial p_{l,j}}, \tag{2.3}$$

on vérifie que les équations d'Euler-Lagrange prennent la forme que voici :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j} - (\partial_l - \varepsilon\mathcal{A}_l)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial p_{l,j}} &= 0, \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j^*} - (\partial_l + \varepsilon\mathcal{A}_l)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial p_{l,j}^*} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

$\mathcal{L}$ étant une fonction réelle, on a évidemment

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j}\right)^* = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j^*} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial p_{l,j}}\right)^* = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial p_l^*}.$$

Nous allons donc définir le *champ de polarisation* grâce aux relations suivantes.

$$q_j' = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j^*}, \qquad p_{l,j}' = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial p_{l,j}^*}, \tag{2.5}$$

et nous voyons que le rôle des équations d'Euler-Lagrange consiste à nous fournir des relations différentielles, relatives au champ de polarisation et qui prennent la forme simple suivante :

$$q'^j = \mathcal{D}_l p'^{l,j}, \tag{2.6}$$

inverse, pour ainsi dire, de celle qui caractérise les relations de définition (2, 2) qui rattachent au champ primaire q_j les formes dérivées $p_{j,l}$.

3. **Le système réciproque d'équations des champs tensoriels.** — Il est possible de faire intervertir les rôles, primaire et secondaire de polarisation, joués respectivement par les couples de champ (q, p) et (p', q'). A cette fin, en nous inspirant de la transformation de Lagrange, nous allons substituer à la place de la densité de lagrangien $\mathcal{L}(q_j, q_j^*; p_{l,j}, p_{jl}^*)$ la fonction qui suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(p_{l,j}', p_{l,j}'^*; q_j', q_j'^*) &= -\mathcal{L} + \partial^l(q^j p_{l,j}'^* + q^{*j} p_{l,j}') \\ &= -\mathcal{L} + q^j\,\partial^l p_{l,j}'^* + q^{*j}\,\partial^l p_{l,j}' \\ &\quad + p_{l,j}'^*\,\partial^l q^j + p_{l,j}'\,\partial^l q^{*j} \\ &= -\mathcal{L} + q^j\,\mathcal{D}^{*l} p_{l,j}'^* + q^{*j}\,\mathcal{D}^l p_{l,j}' \\ &\quad + p_{l,j}^*\,\mathcal{D}^l q^j + p_{l,j}'\,\mathcal{D}^l q^{*j}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

où, ce sont les grandeurs $p_{l,j}$ et $p_{l,j}^*$ qui sont considérées comme champs primaires, tandis que les grandeurs q_j' et $q_j'^*$ symbolisent les formes dérivées suivantes :

$$q_j' = \mathcal{D}^l p_{l,j}', \qquad q_j'^* = \mathcal{D}^{*l} q_{l,j}'^*. \tag{3.2}$$

Il vient alors

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}'}{dp_{l,j}'} &= \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial p_{l,j}'} + \varepsilon\mathcal{A}_l\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial q_j'} = \partial_l q_j^*, & \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial q_j'} &= q_j^*; \\ \frac{d\mathcal{L}'}{dp_{l,j}'^*} &= \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial p_{l,j}'^*} - \varepsilon\mathcal{A}_l\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial q_j'^*} = \partial_l q_j, & \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial q_j'^*} &= q_j \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

et les équations d'Euler-Lagrange, relatives à la fonction $\mathcal{L}'$ s'écrivent

$$p_{l,j} = \mathcal{D}_l q_j, \qquad p_{l,j}^* = \mathcal{D}_l^* q_j \tag{3.4}$$

en y posant

$$\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial p_{l,j}'} = p_{l,j}^*, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial p_{l,j}'^*} = p_{l,j}. \tag{3.3'}$$

4. **Les fonctions $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ et la forme canonique des équations des champs tensoriels.** — A la place du couple de fonctions réciproques $\mathcal{L}(q, p)$ et $\mathcal{L}'(p', q')$ nous allons introduire un couple de fonctions réciproques nouvelles $\mathcal{H}(q, p')$ et $\mathcal{H}(q', p)$, dans le dessein de donner aux équations d'Euler-Lagrange la forme d'équations canoniques de Hamilton. Ces nouvelles fonctions, nous les définirons comme suit :

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}(q_j, q_j^*; p_{l,j}', p_{l,j}'^*) \\ &\quad = -\mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial p_{l,j}}\mathcal{D}_l q_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial p_{l,j}^*}\mathcal{D}_l^* q_j^*, \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}'(p_{l,j}, p_{l,j}^*; q_j', q_j'^*) \\ &\quad = -\mathcal{L}' + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial p_{l,j}'}\,p_{l,j}' + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial p_{l,j}'^*}\,p_{l,j}'^*. \end{aligned} \tag{4.2}$$

ce qui nous conduit aux équations que voici :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_j} &= -\mathcal{D}^{*l} p_{l,j}'^*, & \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_j^*} &= -\mathcal{D}^l p_{l,j}'; \\ \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_{l,j}'^*} &= \mathcal{D}^l q_j, & \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_{l,j}'} &= \mathcal{D}_l^* q_j^*; \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{H}'}{\partial p_{l,j}} &= p_{l,j}'^*, & \frac{\partial\mathcal{H}'}{\partial p_{l,j}^*} &= p_{l,j}'; \\ \frac{\partial\mathcal{H}'}{\partial q_j'} &= -q^{*j}, & \frac{\partial\mathcal{H}'}{\partial q_j'^*} &= -q^j. \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Le système réciproque (4.4) peut encore s'écrire

$$\left.\begin{aligned} -\mathcal{D}^{*l}\left(\frac{\partial\mathcal{H}'}{\partial q_j'}\right) &= q_j'^*, & \mathcal{D}^l\left(\frac{\partial\mathcal{H}'}{\partial q_j'^*}\right) &= p'^{l,j}. \\ \mathcal{D}^{*l}\left(\frac{\partial\mathcal{H}'}{\partial p_{l,j}}\right) &= p'^{*l,j}, & -\mathcal{D}^l\left(\frac{\partial\mathcal{H}'}{\partial p_{l,j}^*}\right) &= q_j'; \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

Le système réciproque est donc caractérisé par le fait que l'opérateur de différentiation $\mathcal{D}_j$ agit non pas sur les grandeurs des champs q'^j et p^{jk} mais sur les dérivées de la fonction $\mathcal{H}'$. Pour accentuer l'analogie entre le système (4.3) et son réciproque (4.5) on peut dire que, dans le cas du système réciproque, les grandeurs de champs q'^j et p^{jk} sont soumises, à l'action de l'opérateur inverse de l'opérateur $\mathcal{D}_j$.

Les équations (4.3) et (4.5) présentent une parenté formelle avec les équations canoniques de Hamilton; pour cette raison, nous leur donnerons le nom des équations hamiltoniennes ou canoniques des champs tensoriels.

5. L'invariance de jauge et de phase. L'existence d'un vecteur conservatif : la densité de charge et de courant. — Le champ extérieur $\mathcal{H}_j^k$ est insensible à la transformation de jauge, appliquée en son potentiel vecteur

$$\underline{\mathcal{A}}_j = \mathcal{A}_j + \partial_j \varphi. \qquad (5.1)$$

Comme les équations des champs font intervenir le potentiel-vecteur du champ extérieur, elles subiraient des modifications lors de la tranformation (5.1). Pour qu'il n'en soit pas ainsi, les champs q_j, $p_{l,j}$; $p'_{l,j}$ et q'_j doivent subir simultanément une *transformation de jauge de première espèce* ou, mieux, *une transformation de phase*

$$\left.\begin{aligned} \underline{q}_j &= q_j \;\mathrm{e}^{-\varepsilon\varphi}, & \underline{q}^*_j &= q^*_j \;\mathrm{e}^{+\varepsilon\varphi}; \\ \underline{p}_{l,j} &= p_{l,j}\,\mathrm{e}^{-\varepsilon\varphi}. & \underline{p}^*_{l,j} &= p^*_{l,j}\,\mathrm{e}^{+\varepsilon\varphi}; \end{aligned}\right\} \qquad (5.2)$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{q}'_j &= q'_j \;\mathrm{e}^{-\varepsilon\varphi}, & \underline{q}'^*_j &= q \;\;\mathrm{e}^{+\varepsilon\varphi}; \\ \underline{p}'_{l,j} &= p'_{l,j}\,\mathrm{e}^{-\varepsilon\varphi}. & \underline{p}'^*_{l,j} &= p'^*_{l,j}\,\mathrm{e}^{+\varepsilon\varphi}; \end{aligned}\right\} \qquad (5.3)$$

ε étant le nombre purement complexe qui figure dans les opérateurs

$$\mathcal{D} = \partial + \varepsilon\mathcal{A} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}^* = \partial - \varepsilon\mathcal{A}.$$

Remarquons ici, que le raisonnement qui va suivre reste applicable au cas des transformations plus générales, que celles qui sont définies par les équations (5.1), (5.2) et (5.3) et qui ont été objet d'une étude récente de notre part. Nous pouvons en effet, considérer le cas du champ d'interaction général, décrit par un ensemble tensoriel : a, a_j, a_{jk}, a_{jkl}, a_{jklm}, qui dérive d'un autre ensemble tensoriel, le champ potentiel : b, b_j, b_{jk}, b_{jkl}, b_{jklm}. Ce dernier champ se prête alors à une transformation de jauge généralisée, caractérisée par un ensemble tensoriel des fonctions génératrices Φ, Φ_j, Φ_{jk}, Φ_{jkl}, Φ_{jklm}.

Dans ce cas général, on tient compte de l'interaction entre le champ (a, a_j, a_{jk}, a_{jkl} et a_{jklm}) et le champ q_j, q^*_j, en remplaçant l'opérateur ∂_k par l'opérateur

$$\partial_k + \varepsilon b_k + \varepsilon_k b + \varepsilon_{kl} b^l + \varepsilon_{klm} b^{lm} + \varepsilon_{klmn} b^{lmn},$$

où ε, ε_k, ε_{kl}, ε_{klm} et ε_{klmn}, désignant l'ensemble tensoriel des coefficients de couplage, qui généralisent la charge électrostatique de l'électron. A la transformation de jauge, faisant intervenir les fonctions génératrices Φ, va correspondre alors une transformation de phase généralisée, du type suivant :

$$\underline{q}_j = q_j \,\mathrm{e}^{-(\varepsilon\Phi + \varepsilon_k\Phi^k + \varepsilon_{kl}\Phi^{kl} + \varepsilon_{klm}\Phi^{klm} + \varepsilon_{klmn}\Phi^{klmn})}$$

Dans ce qui suit, on peut donc toujours considérer que le symbole $\varepsilon\Phi$ représente en réalité le produit scalaire

$$\varepsilon\Phi + \varepsilon_k\Phi^k + \varepsilon_{kl}\Phi^{kl} + \varepsilon_{klm}\Phi^{klm} + \varepsilon_{klmn}\Phi^{klmn}.$$

Cela étant, nous allons imposer l'invariance aux fonctions lagrangiennes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$, lorsque les grandeurs des champs subissent les transformations de phase, infinitésimales,

$$\left.\begin{aligned} \delta q_j &= -\varepsilon\varphi q_j, & \delta q^*_j &= \varepsilon\varphi q^*_j, \\ \delta p_{l,j} &= -\varepsilon\varphi p_{l,j}, & \delta p^*_{l,j} &= \varepsilon\varphi p^*_{l,j}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.4)$$

Il vient

$$\begin{aligned} \delta_\varphi \mathcal{L} &= -\varepsilon\varphi(q'^{*j} q_j - q'^j q^*_j + p'^{*l,j} p_{l,j} - p'^{l,j} p^*_{l,j}) \\ &= -\delta_\varphi \mathcal{L}', \end{aligned} \qquad (5.5)$$

et la condition d'invariance des fonctions $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ par rapport aux transformations de phase, s'écrit

$$q'^{*j} q_j - q'^j q^*_j + p'^{*l,j} p_{l,j} - p'^{l,j} p^*_{l,j} = 0. \qquad (5.6)$$

Cela étant le vecteur suivant, que nous appellerons « densité de charge et de courant »

$$C_l = \varepsilon(p'^*_{l,j} q^j - p'_{l,j} q^{*j}) \qquad (5.7)$$

est conservatif, car on a

$$\partial^l C_l = -(\delta_\varphi \mathcal{L}) \equiv 0. \qquad (5.8)$$

Comme on a

$$\begin{aligned} C_l &= \varepsilon\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(p_{l,j})} q^j - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(p^*_{l,j})} q^{*j}\right] \\ &= \varepsilon\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial q^{*\prime}_j}\; p'^*_{l,j} - \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial q'_j} p'_{l,j}\right), \end{aligned} \qquad (5.9)$$

il en résulte que le vecteur C_l est auto-réciproque.

6. Le tenseur d'énergie du champ. — Nous définirons maintenant deux tenseurs à deux indices $\mathcal{T}_{j,k}$ et $\mathcal{T}'_{j,k}$, que nous appellerons les tenseurs d'énergie du champ, par les relations que voici

$$\mathcal{T}_{j,k} = \mathcal{L}\,\delta_{jk} - p'^{*l}_{j,} p_{k,l} - p'^{l}_{j,} p^*_{k,l}, \qquad (6.1)$$

$$\mathcal{T}'_{j,k} = \mathcal{L}'\delta_{jk} - q^{*l}\mathcal{D}_k p'_{j,l} - q^l \mathcal{D}^*_k p'^*_{j,l}. \qquad (6.2)$$

On trouve facilement, en vertu de (5.7) et de (5.8), les équations suivantes :

$$\partial^j \mathcal{T}_{j,k} = \mathcal{H}_k{}^j C_j = \mathcal{F}_k, \qquad (6.3)$$

$$\partial^j \mathcal{T}'_{j,k} = \mathcal{H}_k{}^j C_j = \mathcal{F}_k. \qquad (6.4)$$

Le vecteur $\mathcal{F}_k$ peut être considéré comme définissant la densité de force, due au champ d'inter-

action $\mathcal{H}_j^k$ s'exerçant sur le vecteur C_j, « la densité de charge et de courant » du champ complexe q^j (ou du champ réciproque $p'_{j,k}$).

Considérons maintenant le tenseur suivant :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{j,k} = \mathcal{T}_{j,k} - \mathcal{T}'_{j,k} &= (\mathcal{L} - \mathcal{L}')\delta_{jk} - p_j'^{*,l} p_{k,l} - p_j'^{,l} p^*_{k,l} \\ &\qquad - q^{*l}\varpi_k p'_{j,l} - q^l \varpi^*_k p'^*_{j,l} \\ &= [2\mathcal{L} - \partial^l(p'^*_{l,i} q^i + p'_{l,j} q^{*j})]\delta_{jk} - p_j'^{*,l} p_{k,l} - p_j'^{,l} p^*_{k,l} \\ &\qquad - q^{*l}\varpi_k p'_{j,l} - q^l \varpi^*_k p'^*_{j,l} \\ &= [2\mathcal{L} - \partial^l(p'^*_{l,m} q^m + p'_{l,m} q^{*m})]\delta_{jk} \\ &\qquad - \delta^k(p'^*_{j,m} q^m + p'_{j,m} q^{*m}).\end{aligned}$$

Le tenseur $\mathcal{R}_{j,k}$ est conservatif, puisque l'on a

$$\partial^j \mathcal{R}_{j,k} = 0.$$

On a aussi

$$\frac{\partial \mathcal{R}_{jk}}{\partial q^l} = \partial^n p'^*_{n,l}\delta_{jk} - \partial_k p'^*_{j,l}, \quad \ldots\ldots$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_{jk}}{\partial p'^{*lm}} = -(\partial_l q_m \delta_{jk} + \partial_k q_l \delta_{jm}), \quad \ldots\ldots$$

$$\partial_k p'^*_{j,l} = \frac{\partial \mathcal{R}_{jk}}{\partial q_l} - \frac{1}{5}\frac{\partial \mathcal{R}_m{}^m}{\partial q_l}\delta_{jk},$$

$$\partial_k q_l = -\frac{1}{5}\frac{\partial \mathcal{R}_m{}^m}{\partial p'^{*k,l}} = -\frac{1}{5}\frac{\partial \mathcal{R}_m{}^k}{\partial p'^{*l}_m}.$$

7. **L'équation du type Hamilton-Jacobi de la théorie générale des champs tensoriels.** — Revenons à la fonction lagrangienne $\mathcal{L}(q_j, q_j^*; p_{l,j}, p^*_{l,j})$ du paragraphe 2, et considérons l'intégrale suivante :

$$\iiiint \mathcal{L}\, d\Omega = \iiint S_l\, dV^l = \iiiint {}^t\partial^l S_l\, d\Omega, \qquad (7.1)$$

les symboles ${}^t\partial^l$ désignant les opérateurs de la dérivation totale, pour les distinguer des opérateurs de la dérivation partielle ${}^p\partial^l$.

Sur les extrémales, on a donc

$$\mathcal{L} = {}^t\partial^l S_l = {}^p\partial^l S_l + \frac{\partial S_l}{\partial q_j}\partial_l q_j + \frac{\partial S_l}{\partial q_j^*}\partial_l q_j^*. \qquad (7.2)$$

En posant alors

$$p'^*_{l,j} = \frac{\partial S_l}{\partial q_j}, \qquad p'_{l,j} = \frac{\partial S_l}{\partial q_j^*}, \qquad (7.3)$$

On voit, en vertu de (4.1), qu'on peut écrire

$$\begin{aligned}{}^p\partial^l S_l - \varepsilon\frac{\partial S^l}{\partial q_j}\mathfrak{A}_l q^j + \varepsilon\frac{\partial S^l}{\partial q_j^*}\mathfrak{A}_l q^{*j} \\ + \mathcal{H}\left(q_j, q_j^*; \frac{\partial S^l}{\partial q_j^*}, \frac{\partial S^l}{\partial q_j}\right) = 0. \qquad (7.4)\end{aligned}$$

Nous allons montrer que l'équation fondamentale (7.4) jouit, vis-à-vis du système canonique (4.3) de tous les privilèges de l'équation aux dérivées partielles de Hamilton-Jacobi. En effet, soit

$$S_l = S_l(q_j, q_j^*; C'_j, C'^*_j; x_l) \qquad (7.5)$$

une intégrale de cette équation, où les C'_{jk}, C'^*_{jk} sont des constantes arbitraires, et considérons les équations suivantes :

$$\frac{\partial S_l}{\partial q_j} = p'^*_{l,j}, \qquad \frac{\partial S_l}{\partial q_j^*} = p'_{l,j}; \qquad (7.6)$$

$$\frac{\partial S_l}{\partial C'_j} = b^*_{l,j}, \qquad \frac{\partial S_l}{\partial C'^*_j} = b_{l,j}; \qquad (7.7)$$

où les $b_{l,j}$ et les $b^*_{l,j}$ sont des fonctions de x_l et de certaines constantes arbitraires, fonctions satisfaisant aux relations

$$\partial^l b_{l,j} = 0, \qquad \partial^l b^*_{l,j} = 0. \qquad (7.8)$$

Nous admettrons également que les déterminants hessiens

$$\left\| \frac{\partial^2 S_l}{\partial q_j\, \partial C'_k} \right\|, \quad \left\| \frac{\partial^2 S_l}{\partial q_j\, \partial C'^*_k} \right\|, \quad \left\| \frac{\partial^2 S_l}{\partial q_j^*\, \partial C'_k} \right\|, \quad \left\| \frac{\partial^2 S_l}{\partial q_j^*\, \partial C'^*_k} \right\| \qquad (7.9)$$

sont tous différents de zéro.

Dérivons alors (7.4) par rapport à q_j, q_j^*, C'^*_k et C'_k, respectivement. Il vient

$$\begin{aligned}{}^p\varpi^{*l}\frac{\partial S_l}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p'^*_{k,l}} - \varepsilon\mathfrak{A}_k q^l\right)\frac{\partial^2 S_k}{\partial q_l\, \partial q_j} \\ + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p'_{k,l}} + \varepsilon\mathfrak{A}_k q^{*l}\right)\frac{\partial^2 S_k}{\partial q_l^*\, \partial q_j} = 0, \qquad (7.10)\end{aligned}$$

. . . .

$$\begin{aligned}{}^p\partial^l\frac{\partial S_l}{\partial C'_k} + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p'^*_{k,l}} - \varepsilon\mathfrak{A}_k q^l\right)\frac{\partial^2 S_k}{\partial q_l\, \partial C'_k} \\ + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p'_{k,l}} + \varepsilon\mathfrak{A}_k q^{*l}\right)\frac{\partial^2 S_k}{\partial q_l^*\, \partial C'_k} = 0. \qquad (7.11)\end{aligned}$$

Appliquons maintenant l'opérateur ${}^t\varpi^{*l}$ à la première des équations (7.6) et l'opérateur ${}^t\partial^i$ à la première des équations (7.7). On obtient

$${}^p\varpi^{*i}\frac{\partial S_i}{\partial q_j} + \frac{\partial^2 S_k}{\partial q_j\, \partial q_l^*}\partial_k q_l^* + \frac{\partial^2 S_k}{\partial q_j\, \partial q_l}\partial_k q_l = \varpi^*_i p'_{i,j}, \qquad (7.12)$$

$${}^p\partial_i\frac{\partial S_i}{\partial C'_k} + \frac{\partial^2 S_k}{\partial q_l^*\, \partial C'_k}\partial_k q_l^* + \frac{\partial^2 S_k}{\partial q_l\, \partial C'_k}\partial_k q_l = 0. \qquad (7.13)$$

En retranchant (7.13) de (7.11) et (7.12) de (7.10), on obtient, en vertu de la non-nullité des déterminants hessiens, les équations canoniques (4.3). C. Q. F. D.

8. **Transformations canoniques et invariants intégraux.** — Une famille de transformations à un paramètre vectoriel X_n :

$$\left.\begin{aligned} q_i &= q_i(Q_k, Q_k^*; P'_{k,l}, P'^*_{k,l}; X_n), \\ q_i^* &= q_i^*(Q_k, Q_k^*; P'_{k,l}, P'^*_{k,l}; X_n), \\ p'_{i,j} &= p'_{i,j}(Q_k, Q_k^*; P'_{k,l}, P'^*_{k,l}; X_n), \\ p^*_{i,j} &= p'^*_{i,j}(Q_k, Q_k^*; P'_{k,l}, P'^*_{k,l}; X_n) \end{aligned}\right\} \qquad (8.1)$$

va définir les *transformations canoniques*, lorsqu'elle jouira de la propriété de garder invariante la forme des équations canoniques.

Considérons alors la fonction

$$S^l = S^l(q_j, q_j^*; Q_k, Q_k^*; X_n) \qquad (8.2)$$

génératrice des transformations (8.1) satisfaisant l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}\delta S^l = \omega^l - \Omega^l = p'^{*l,j}\,\delta q_j \\ + p'^{l,j}\,\delta q_j^* - P'^{*l,j}\,\delta Q_j - P'^{l,j}\,\delta Q_j^*, \qquad (8.3)\end{aligned}$$

avec

$$\omega^l = p'^{*l,j}\,\delta q_j + p'^{l,j}\,\delta q_j^*,$$

$$\Omega^l = P'^{*l,j}\,\delta Q_j + P'^{l,j}\,\delta Q_j^*, \qquad (8.4)$$

L'égalité (8.3) entraîne les équations que voici :

$$p'^{*i,j} = \frac{\partial S^i}{\partial q_j}, \qquad p'^{i,j} = \frac{\partial S^i}{\partial q_j^*};$$
$$P'^{*i,j} = -\frac{\partial S^i}{\partial Q_j}, \qquad P'^{i,j} = -\frac{\partial S^i}{\partial Q_j^*}. \tag{8.5}$$

Calculons maintenant $\partial_i \omega^i$, on a

$$\begin{aligned}\partial_i \omega^i &= \mathcal{D}_i^* p'^{i,j}\, \delta q_j + p'^{*i,j}\, \delta(\mathcal{D}_i q_j) \\ &\quad + \mathcal{D}_i p'^{i,j}\, \delta q_j^* + p'^{i,j}\, \delta(\mathcal{D}_i^* q_j) \\ &= q'^{*j}\, \delta q_j + q'^{j}\, \delta q_j^* + p'^{*i,j}\, \delta p_{i,j} + p'^{i,j}\, \delta p_{i,j}^* = \delta \mathcal{L}.\end{aligned} \tag{8.6}$$

Et puisque $\Omega^i = \omega^i - \delta S^i$, il en résulte

$$\partial_i \Omega^i = \delta(\mathcal{L} - \partial_i S^i) = \delta \overline{\mathcal{L}}, \tag{8.7}$$

$\overline{\mathcal{L}}$ étant la fonction lagrangienne transformée. Nous pouvons alors calculer la fonction $\overline{\mathcal{H}}$ transformée

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{H}} &= -\overline{\mathcal{L}} + P'^{*i,j} P_{i,j} + P'^{i,j} P_{i,j}^* \\ &= \mathcal{H} + {}^t\partial_i S^i + P'^{*i,j} P_{i,j} + P'^{i,j} P_{i,j}^* \\ &\quad - p'^{*i,j} p_{i,j} - p'^{i,j} p_{i,j}^*.\end{aligned} \tag{8.8}$$

Compte tenu des équations (8.5) et de la relation qui existe entre la divergence totale ${}^t\partial_i S^i$ et la divergence partielle ${}^p\partial_i S^i$, on obtient finalement

$$\begin{aligned}&\overline{\mathcal{H}}(Q_i, Q_i^*; \mathcal{P}'_{i,j}, \mathcal{P}^*_{i,j}; x_n) + \varepsilon \mathfrak{A}^i \frac{\partial S^i}{\partial Q_j} Q_j - \varepsilon \mathfrak{A}^i \frac{\partial S^i}{\partial Q_j^*} Q_j^* \\ &= \mathcal{H} + {}^p\partial_i S^i - \varepsilon \mathfrak{A}^i \frac{\partial S^i}{\partial q_j} q_j + \varepsilon \mathfrak{A}^i \frac{\partial S^i}{\partial q_j^*} q_j^*.\end{aligned} \tag{8.9}$$

Supposons alors que l'on puisse trouver une transformation canonique, qui amène à une fonction

$$\overline{\mathcal{H}} = -\varepsilon \mathfrak{A}_i \mathcal{P}'^{*i,j} Q_j + \varepsilon \mathfrak{A}_i \mathcal{P}'^{i,j} Q_j^* = -\varepsilon \mathfrak{A}_i C^i. \tag{8.10}$$

Il vient alors

$$\mathcal{D}_i Q_j = -\frac{\partial \overline{\mathcal{H}}}{\partial \mathcal{P}'^{*i,j}} = \varepsilon \mathfrak{A}_i Q_j, \qquad \mathcal{D}^i \mathcal{P}'_{i,j} = \varepsilon \mathfrak{A}_i \mathcal{P}'^{i,j};$$
$$\mathcal{D}_i^* Q_j^* = -\varepsilon \mathfrak{A}_i Q_j^*, \qquad \mathcal{D}^i \mathcal{P}'^*_{i,j} = -\varepsilon \mathfrak{A}_i \mathcal{P}'^{*i,j};$$

d'où résultent les équations suivantes :

$$\partial_i Q_j = 0, \qquad \partial_i Q_j^* = 0; \tag{8.11}$$
$$\partial^i \mathcal{P}'_{i,j} = 0, \qquad \partial^i \mathcal{P}'^*_{i,j} = 0. \tag{8.12}$$

Nous voyons donc que la recherche de la transformation canonique précitée revient à la recherche des solutions de l'équation aux dérivées partielles (7.4) du type de Hamilton-Jacobi.

En revenant à l'égalité (8.3), elle va nous permettre la définition des *invariants intégraux*. Les champs $q_j(q_j^*)$ et les champs conjugués de polarisation $p'^{i,j}(p'^{*i,j})$ définissent un état du système et les équations des extrémales nous fournissent la répartition des états sur les sections successives de l'espace-temps en partant d'une section initiale. L'état du système peut être représenté par un point de l'espace symbolique $(q_j, q_j^*; p'^{i,j}, p'^{*i,j})$ et à la succession d'états correspond une trajectoire dans cet espace. De l'égalité (8.3) on tire alors cette conclusion que l'intégrale curviligne $\oint \omega^i$ prise sur une courbe fermée de l'espace symbolique des états, est indépendante de la section de l'espace-temps sur laquelle est considéré l'état du système.

9. Les équations des champs spinoriels. — Les équations des champs spinoriels peuvent s'obtenir formellement, en suivant une voie analogue à celle qui a été utilisée en théorie des champs tensoriels. A cet effet, il suffit, par exemple, d'employer la notation de Van der Waerden, qui permet très simplement d'étendre aux spineurs les méthodes du calcul tensoriel.

Soit donc une densité scalaire (réelle) de lagrangien $\mathcal{L}$, fonctions des spineurs complexes ξ_α, $\xi_{\dot\beta}$, η^β et η^α et de leurs formes dérivées

$$\left.\begin{aligned}\pi_\alpha &= \frac{1}{\varkappa} \mathcal{D}_{\alpha\beta}\, \eta^\beta, & \pi_\beta &= -\frac{1}{\varkappa} \mathcal{D}^*_{\beta\alpha}\, \eta^\alpha, \\ \rho^\beta &= \frac{1}{\varkappa} \mathcal{D}^{\alpha\beta}\, \xi_\alpha, & \rho^\alpha &= -\frac{1}{\varkappa} \mathcal{D}^{*\beta\alpha}\, \xi_\beta,\end{aligned}\right\} \tag{9.1}$$

x étant une certaine constante purement imaginaire ($x^* = -x$), que nous introduisons dans le but de pouvoir plus facilement obtenir dans la suite les équations de Dirac.

Les équations d'Euler-Lagrange (nous n'écrivons pas les équations complexes conjuguées) s'écrivent

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\mathcal{L}}{d\xi_\alpha} - \partial^{\beta\alpha}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathcal{D}^{\beta\alpha_1}\xi_{\alpha_1})}\right] = 0, \\ &\frac{d\mathcal{L}}{d\eta_\beta} - \partial_{\alpha\beta}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathcal{D}_{\beta_1\alpha}\,\eta^{\beta_1})}\right] = 0,\end{aligned}\right\} \tag{9.2}$$

avec

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\mathcal{L}}{d\xi_\alpha} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathcal{D}^{\beta\alpha_1}\xi_{\alpha_1})} \frac{\partial(\mathcal{D}^{\beta\alpha_1}\xi_{\alpha_1})}{\partial \xi_\alpha} \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_\alpha} + \varepsilon \mathfrak{A}^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathcal{D}^{\beta\alpha_1}\xi_{\alpha_1})}, \\ \frac{d\mathcal{L}}{d\eta^\beta} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathcal{D}_{\beta_1\alpha}\,\eta^{\beta_1})} \frac{\partial(\mathcal{D}_{\alpha\beta_1}\,\eta^{\beta_1})}{\partial \eta^\beta} \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^\beta} + \varepsilon \mathfrak{A}_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathcal{D}_{\beta_1\alpha}\,\eta^{\beta_1})}.\end{aligned}\right\} \tag{9.3}$$

Nous allons définir maintenant *le champ de spineurs de polarisation* à l'aide des relations que voici :

$$\left.\begin{aligned}\xi'^\alpha &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_\alpha}, & \xi'^\beta &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_\beta}, \\ \eta'_\alpha &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^\alpha}, & \eta'_\beta &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^\beta}, \\ \pi'^\alpha &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi_\alpha}, & \pi'^\beta &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi_\beta}, \\ \rho'_\alpha &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho^\alpha}, & \rho'_\beta &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho^\beta}.\end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

Cela étant, les équations d'Euler-Lagrange rela-

tives à la théorie générale des champs spinoriels, s'écrivent alors comme suit :

$$\left.\begin{aligned} \xi'^{\alpha} &= -\frac{1}{\chi}\mathcal{D}^{*\beta\alpha}\rho'_{\beta}, & \xi'^{\beta} &= \frac{1}{\chi}\mathcal{D}^{\alpha\beta}\rho'_{\alpha}; \\ \eta'_{\beta} &= -\frac{1}{\chi}\mathcal{D}^{*}_{\alpha\beta}\pi'^{\alpha}, & \eta'_{\alpha} &= \frac{1}{\chi}\mathcal{D}_{\beta\alpha}\pi'^{\beta}; \end{aligned}\right\} \quad (9.5)$$

où $\mathcal{D}^*$ signifie qu'on a changé ε en $-\varepsilon$.

10. **Le système réciproque d'équations des champs spinoriels.** — Nous allons introduire à la place de la fonction $\mathcal{L}$, la fonction réciproque

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}'(\pi'^{\alpha}, \pi'^{\beta}, \rho'_{\alpha}, \rho'_{\beta}; \xi'^{\alpha}, \xi'^{\beta}, \eta'_{\alpha}, \eta'_{\beta}) \\ &\quad = -\mathcal{L} + \frac{1}{\chi}\partial^{\alpha\beta}(\xi_{\alpha}\rho'_{\beta} + \eta_{\beta}\pi'_{\alpha}) \\ &\qquad - \frac{1}{\chi}\partial^{\beta\alpha}(\xi_{\beta}\rho'_{\alpha} + \eta_{\alpha}\pi'_{\beta}) \\ &\quad = -\mathcal{L} + \rho^{\beta}\rho'_{\beta} + \pi_{\alpha}\pi'^{\alpha} + \rho^{\alpha}\rho'_{\alpha} + \pi^{\beta}\pi'_{\beta} \\ &\qquad - \xi_{\alpha}\xi'^{\alpha} - \eta_{\beta}\eta'^{\beta} - \xi_{\beta}\xi'^{\beta} - \eta_{\alpha}\eta'^{\alpha}, \end{aligned} \quad (10.1)$$

Il vient tout d'abord

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}'}{d\pi'^{\alpha}} &= \frac{1}{\chi}\partial_{\alpha\beta}\eta^{\beta}, & \frac{\partial\mathcal{L}'}{d\pi'^{\beta}} &= -\frac{1}{\chi}\partial_{\beta\alpha}\eta^{\alpha}, \\ \frac{d\mathcal{L}'}{d\rho'_{\alpha}} &= -\frac{1}{\chi}\partial^{\beta\alpha}\xi_{\beta}, & \frac{d\mathcal{L}'}{d\rho'_{\beta}} &= \frac{1}{\chi}\partial^{\alpha\beta}\xi_{\alpha}; \\ \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\xi'^{\alpha}} &= -\xi_{\alpha}, & \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\xi'^{\beta}} &= -\xi_{\beta}, \\ \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\eta'_{\alpha}} &= \eta^{\alpha}, & \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\eta'_{\beta}} &= -\eta^{\beta}, \end{aligned}\right\} \quad (10.2)$$

et ensuite, étant donné les équations de définition (9.5), on aboutit aux équations de Lagrange-Euler sous la forme du système (9.1).

11. **Les fonctions $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ et la forme hamiltonienne des équations des champs spinoriels.** — En partant des fonctions lagrangiennes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ nous allons construire deux nouvelles fonctions

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}(\xi_{\alpha}, \xi_{\beta}, \eta^{\beta}, \eta^{\alpha}; \pi'_{\alpha}, \pi'_{\beta}; \rho'^{\beta}, \rho'^{\alpha}) \\ &\quad = -\mathcal{L} + \pi'_{\alpha}\pi^{\alpha} + \pi'_{\beta}\pi^{\beta} + \rho'^{\beta}\rho_{\beta} + \rho^{\alpha}\rho_{\alpha}, \end{aligned} \quad (11.1)$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}'(\pi_{\alpha}, \pi_{\alpha}, \rho^{\beta}, \rho^{\alpha}; \xi'^{\alpha}, \xi'^{\beta}, \eta'_{\beta}, \eta'_{\alpha}) \\ &\quad = -\mathcal{L}' + \pi'_{\alpha}\pi^{\alpha} + \pi'_{\beta}\pi^{\beta} + \rho'^{\beta}\rho_{\beta} + \rho'^{\alpha}\rho_{\alpha}, \end{aligned} \quad (11.2)$$

qui nous permettent d'écrire à la place des équations d'Euler-Lagrange, les équations canoniques que voici :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\xi_{\alpha}} &= +\frac{1}{\chi}\mathcal{D}^{*\beta\alpha}\rho'_{\beta}, & \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\xi_{\beta}} &= -\frac{1}{\chi}\mathcal{D}^{\alpha\beta}\rho'_{\alpha}; \\ \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\eta^{\beta}} &= \frac{1}{\chi}\mathcal{D}^{*}_{\alpha\beta}\pi'^{\alpha}, & \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\eta^{\alpha}} &= -\frac{1}{\chi}\mathcal{D}_{\beta\alpha}\pi'^{\beta}; \\ \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi'_{\alpha}} &= \frac{1}{\chi}\mathcal{D}_{\alpha\beta}\eta^{\beta}, & \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi'_{\beta}} &= -\frac{1}{\chi}\mathcal{D}^{*}_{\beta\alpha}\eta^{\alpha}; \\ \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\rho'_{\beta}} &= \frac{1}{\chi}\mathcal{D}_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}, & \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\rho'_{\alpha}} &= -\frac{1}{\chi}\mathcal{D}^{*}_{\beta\alpha}\xi^{\beta}; \end{aligned}\right\} \quad (11.3)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{H}'}{\partial\pi_{\alpha}} &= \pi'^{\alpha}, & \frac{\partial\mathcal{H}'}{\partial\pi_{\beta}} &= \pi'^{\beta}, \\ \frac{\partial\mathcal{H}'}{\partial\rho^{\beta}} &= \rho'_{\beta}, & \frac{\partial\mathcal{H}'}{\partial\rho^{\alpha}} &= \rho'_{\alpha}; \\ \frac{\partial\mathcal{H}'}{\partial\xi'^{\alpha}} &= \xi_{\alpha}, & \frac{\partial\mathcal{H}'}{\partial\xi'^{\beta}} &= \xi_{\beta}, \\ \frac{\partial\mathcal{H}'}{\partial\eta'_{\beta}} &= \eta^{\beta}, & \frac{\partial\mathcal{H}'}{\partial\eta'_{\alpha}} &= \eta^{\alpha}. \end{aligned}\right\} \quad (11.4)$$

Le système réciproque (10.4) pouvant encore s'écrire :

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\chi}\mathcal{D}^{*}_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial\mathcal{H}'}{\partial\pi_{\alpha}}\right) &= \eta'_{\beta}, & \frac{1}{\chi}\mathcal{D}_{\beta\alpha}\left(\frac{\partial\mathcal{H}'}{\partial\pi_{\beta}}\right) &= \eta'_{\alpha}, \\ -\frac{1}{\chi}\mathcal{D}^{*\beta\alpha}\left(\frac{\partial\mathcal{H}'}{\partial\rho^{\beta}}\right) &= \xi'^{\alpha}, & \frac{1}{\chi}\mathcal{D}^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial\mathcal{H}'}{\partial\rho^{\alpha}}\right) &= \xi'^{\beta}, \\ \frac{1}{\chi}\mathcal{D}^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial\mathcal{H}'}{\partial\xi'^{\alpha}}\right) &= \rho^{\beta}, & -\frac{1}{\chi}\mathcal{D}^{*\beta\alpha}\left(\frac{\partial\mathcal{H}'}{\partial\xi'^{\beta}}\right) &= \rho^{\alpha}, \\ \frac{1}{\chi}\mathcal{D}_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial\mathcal{H}'}{\partial\eta'_{\beta}}\right) &= \pi_{\alpha}; & -\frac{1}{\chi}\mathcal{D}^{*}_{\beta\alpha}\left(\frac{\partial\mathcal{H}'}{\partial\eta'_{\alpha}}\right) &= \pi_{\beta}. \end{aligned}\right\} \quad (11.5)$$

12. **L'invariance de jauge et de phase et la conservation du vecteur « densité de charge et de courant. »** — A la transformation de jauge, appliquée au potentiel-vecteur du champ d'interaction

$$\underline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} + \operatorname{grad}\varphi, \quad (12.1)$$

nous allons faire correspondre une transformation de phase suivante :

$$\left.\begin{aligned} \underline{\xi}_{\alpha} &= \xi_{\alpha}\,e^{-\varepsilon\varphi}, & \underline{\eta}^{\beta} &= \eta^{\beta}\,e^{-\varepsilon\varphi}; \\ \underline{\rho}^{\beta} &= \rho^{\beta}\,e^{-\varepsilon\varphi}, & \underline{\pi}_{\alpha} &= \pi_{\alpha}\,e^{-\varepsilon\varphi}; \\ \underline{\xi}'^{\alpha} &= \xi'^{\alpha}\,e^{+\varepsilon\varphi}, & \underline{\eta}'_{\beta} &= \eta'^{\beta}\,e^{+\varepsilon\varphi}; \\ \underline{\rho}'_{\beta} &= \rho'_{\beta}\,e^{+\varepsilon\varphi}, & \underline{\pi}'^{\alpha} &= \pi'^{\alpha}\,e^{+\varepsilon\varphi}. \end{aligned}\right\} \quad (12.2)$$

En imposant l'invariance aux fonctions lagrangiennes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$, lorsque les grandeurs des champs subissent les transformations de phase infinitésimales,

$$\left.\begin{aligned} \delta\xi_{\alpha} &= -\varepsilon\varphi\xi_{\alpha}, & \delta\eta^{\beta} &= -\varepsilon\varphi\eta^{\beta}, \\ \delta\rho^{\beta} &= -\varepsilon\varphi\rho^{\beta}, & \delta\pi_{\alpha} &= -\varepsilon\varphi\pi_{\alpha}; \\ \delta\xi'^{\alpha} &= \varepsilon\varphi\xi'^{\alpha}, & \delta\eta'_{\beta} &= \varepsilon\varphi\eta'_{\beta}, \\ \delta\rho'_{\beta} &= \varepsilon\varphi\rho'_{\beta}, & \delta\pi'^{\alpha} &= \varepsilon\varphi\pi'^{\alpha}. \end{aligned}\right\} \quad (12.3)$$

il vient

$$\begin{aligned} \delta_{\varphi}\mathcal{L} &= -\delta_{\varphi}\mathcal{L}' \\ &= -\varepsilon\varphi(\xi'_{\alpha}\xi^{\alpha} + \eta'_{\beta}\eta^{\beta} - \xi'_{\beta}\xi^{\beta} - \eta'_{\alpha}\eta^{\alpha} \\ &\qquad - \pi'^{\alpha}\pi'_{\alpha} - \rho'_{\beta}\rho^{\beta} + \pi'^{\beta}\pi_{\beta} + \pi'^{\beta}\pi_{\beta} + \rho'_{\alpha}\rho^{\alpha}), \end{aligned} \quad (12.4)$$

et la condition d'invariance de phase s'écrit

$$\begin{aligned} &\xi'_{\alpha}\xi^{\alpha} + \eta'_{\beta}\eta^{\beta} - \xi'_{\beta}\xi^{\beta} - \eta'_{\alpha}\eta^{\alpha} - \pi'^{\alpha}\pi_{\alpha} \\ &\qquad - \rho'_{\beta}\rho^{\beta} + \pi'^{\beta}\pi_{\beta} + \rho'_{\alpha}\rho^{\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Cela étant nous pouvons définir un vecteur conservatif que nous allons appeler la « densité de charge et de courant » de la manière que voici

$$C_{\alpha\beta} = \varepsilon(\xi_{\alpha}\rho'_{\beta} + \eta_{\beta}\pi'_{\alpha} - \xi_{\beta}\rho'_{\alpha} - \eta_{\alpha}\pi'_{\alpha}). \quad (12.6)$$

On a, en effet, en vertu de la condition (12.5)

$$\partial^{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} = 0. \tag{12.7}$$

13. **Les spineurs d'énergie du champ.** — Nous allons considérer les spineurs à quatre indices suivants :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\alpha_1\beta_1;\alpha_2\beta_2} = {} & \mathcal{L}\,\delta_{\alpha_1\beta_1;\alpha_2\beta_2} - \frac{1}{\varkappa}\rho'_{\alpha_1}\mathcal{D}^{\star}_{\beta_2\alpha_2}\xi_{\beta_1} \\ & - \frac{1}{\varkappa}\rho'_{\beta_1}\mathcal{D}_{\alpha_2\beta_2}\xi_{\alpha_1} \\ & + \frac{1}{\varkappa}\pi'_{\alpha_1}\mathcal{D}_{\alpha_2\beta_2}\eta_{\beta_1} - \frac{1}{\varkappa}\pi'_{\beta_1}\mathcal{D}^{\star}_{\alpha_2\beta_2}\eta_{\alpha_1},\end{aligned} \tag{13.1}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}'_{\alpha_1\beta_1;\alpha_2\beta_2} = {} & \mathcal{L}'\,\delta_{\alpha_1\beta_1;\alpha_2\beta_2} + \frac{1}{\varkappa}\xi_{\beta_1}\mathcal{D}_{\beta_2\alpha_2}\rho'_{\alpha_1} \\ & - \frac{1}{\varkappa}\xi_{\alpha_1}\mathcal{D}^{\star}_{\alpha_2\beta_2}\rho'_{\beta_1} \\ & - \frac{1}{\varkappa}\eta_{\beta_1}\mathcal{D}^{\star}_{\beta_2\alpha_2}\pi'_{\alpha_1} + \frac{1}{\varkappa}\eta_{\alpha_1}\mathcal{D}_{\alpha_2\beta_2}\pi'_{\beta_1},\end{aligned} \tag{13.2}$$

où $\delta_{\alpha_1\beta_1;\alpha_2\beta_2}$ est le symbole de Kronecker en notation spinorielle.

Compte tenu de la définition (12.6), il vient alors

$$\partial^{\alpha_1\beta_1}\mathcal{T}_{\alpha_1\beta_1;\alpha_2\beta_2} = \frac{1}{\varkappa}C^{\alpha_1\beta_1}\mathcal{H}_{\alpha_1\beta_1;\alpha_2\beta_2}, \tag{13.3}$$

$$\partial^{\alpha_1\beta_1}\mathcal{T}'_{\alpha_1\beta_1;\alpha_2\beta_2} = \frac{1}{\varkappa}C^{\alpha_1\beta_1}\mathcal{H}_{\alpha_1\beta_1;\alpha_2\beta_2}; \tag{13.4}$$

où l'on a posé

$$\mathcal{H}_{\alpha_1\beta_1;\alpha_2\beta_2} = \partial_{\alpha_1\beta_1}\mathcal{A}_{\alpha_2\beta_2} - \partial_{\alpha_2\beta_2}\mathcal{A}_{\alpha_1\beta_1}. \tag{13.5}$$

On a, par ailleurs, la relation suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\alpha_1\beta_1;\alpha_2\beta_2} &= \mathcal{T}_{\alpha_1\beta_1;\alpha_2\beta_2} - \mathcal{T}'_{\alpha_1\beta_1;\alpha_2\beta_2} \\ &= (\mathcal{L} - \mathcal{L}')\,\delta_{\alpha_1\beta_1;\alpha_2\beta_2} \\ &\quad - \frac{1}{\varkappa}\partial_{\beta_2\alpha_2}(\rho'_{\alpha_1}\xi_{\beta_1}\pi'_{\alpha_1}\eta_{\beta_1}) \\ &\quad + \frac{1}{\varkappa}\partial_{\alpha_2\beta_2}(\rho'_{\beta_1}\xi_{\alpha_1} - \pi'_{\beta_1}\eta_{\alpha_1}),\end{aligned} \tag{13.6}$$

$$\partial^{\alpha_1\beta_1}\mathcal{R}_{\alpha_1\beta_1;\alpha_2\beta_2} = 0. \tag{13.7}$$

14. **L'équation du type Hamilton-Jacobi de la théorie des champs spinoriels.** — Tout d'abord nous allons nous occuper brièvement d'une généralisation de la méthode employée aux paragraphes 9 à 13, en considérant une fonction lagrangienne $\mathcal{L}$ qui dépend des champs ξ_α, ξ_β, η^β, η^α et des formes dérivées plus générales :

$$\left.\begin{aligned}&\pi_{\alpha_1\beta_1}{}^{\beta_2} = \frac{1}{\varkappa}\mathcal{D}_{\alpha_1\beta_1}\eta^{\beta_2}, \qquad \pi_{\beta_1\alpha_1}{}^{\alpha_2} = -\frac{1}{\varkappa}\mathcal{D}^{\star}_{\beta_1\alpha_1}\eta^{\alpha_2}; \\ &\rho^{\beta_1\alpha_1}{}_{\alpha_2} = \frac{1}{\varkappa}\mathcal{D}^{\alpha_1\beta_1}\xi_{\alpha_2}, \qquad \rho^{\alpha_1\beta_1}{}_{\beta_2} = -\frac{1}{\varkappa}\mathcal{D}^{\star\beta_1\alpha_1}\xi_{\beta_2},\end{aligned}\right\} \tag{14.1}$$

et de laquelle on déduit les équations d'Euler-Lagrange suivante :

$$\left.\begin{aligned}&\xi'^{\alpha_1} = -\frac{1}{\varkappa}\mathcal{D}^{\star\beta_2\alpha_2}\rho'_{\beta_2\alpha_2}{}^{\alpha_2}, \qquad \xi'^{\beta_1} = \frac{1}{\varkappa}\mathcal{D}^{\alpha_2\beta_2}\rho'_{\alpha_2\beta_2}{}^{\beta_1}; \\ &\eta'_{\beta_1} = -\frac{1}{\varkappa}\mathcal{D}^{\star}_{\alpha_2\beta_2}\pi'^{\alpha_2\beta_2}{}_{\beta_1}, \qquad \eta'_{\alpha_1} = \frac{1}{\varkappa}\mathcal{D}_{\beta_2\alpha_2}\pi'^{\beta_2\alpha_2}{}_{\alpha_1};\end{aligned}\right\} \tag{14.2}$$

tandis que les équations canoniques s'écrivent

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\xi_{\alpha_1}} &= \frac{1}{\varkappa}\mathcal{D}^{\star\beta_2\alpha_2}\rho'_{\beta_2\alpha_2}{}^{\alpha_1}, \\ \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\xi_{\beta_1}} &= -\frac{1}{\varkappa}\mathcal{D}^{\alpha_2\beta_2}\rho'_{\alpha_2\beta_2}{}^{\beta_1}; \\ \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\eta^{\beta_1}} &= \frac{1}{\varkappa}\mathcal{D}^{\star}_{\alpha_2\beta_2}\pi'^{\alpha_2\beta_2}{}_{\beta_1}, \\ \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\eta^{\alpha_1}} &= -\frac{1}{\varkappa}\mathcal{D}_{\beta_2\alpha_2}\pi'^{\beta_2\alpha_2}{}_{\alpha_1}; \\ \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\rho'_{\beta_2\alpha_2}{}^{\alpha_1}} &= \frac{1}{\varkappa}\mathcal{D}^{\beta_2\alpha_2}\xi_{\alpha_1}, \\ \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\rho'_{\alpha_2\beta_2}{}^{\beta_1}} &= -\frac{1}{\varkappa}\mathcal{D}^{\star\beta_2\alpha_2}\xi_{\beta_1}; \\ \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi'_{\alpha_1\beta_1}{}^{\beta_2}} &= \frac{1}{\varkappa}\mathcal{D}_{\alpha_1\beta_1}\eta^{\beta_2}, \\ \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi'_{\beta_1\alpha_1}{}^{\alpha_2}} &= -\frac{1}{\varkappa}\mathcal{D}^{\star\beta_1\alpha_1}\eta_{\alpha_2}.\end{aligned}\right\} \tag{14.3}$$

Les équations étudiées aux paragraphes 8 à 12 s'obtiennent, de celles que nous écrivons ici, en contractant les deux derniers indices dans la définition des formes (14.1). Cette procédure est l'équivalente à l'extraction des équations (14.1) de celles qui présentent un caractère irréductible. Du point de vue de la théorie des corpuscules à spin, on voit ainsi que les équations les plus générales que semble introduire le principe variationnel, relatif à un lagrangien ne faisant intervenir que des spineurs de rang 1, sont relatives à la théorie d'un corpuscule de spin $\frac{3}{2}$, qui se réduisent à celles du corpuscule $C^{\frac{3}{2}}_{\frac{1}{2}}$, et à celle du corpuscule $C^{\frac{1}{2}}$. D'une manière générale, pour le champ spinoriel de rang n, les équations d'Euler-Lagrange conduiront à définir un corpuscule $C^{\frac{n}{2}+1}_{\frac{n}{2}+1}$ et un corpuscule $C^{\frac{n}{2}}_{\frac{n}{2}}$.

Cela étant, les équations canoniques (14.3) peuvent être considérées comme décrivant les caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles du type de Hamilton-Jacobi. Pour pouvoir construire cette équation, nous allons introduire une fonction $S_{\alpha\beta}(\xi_\alpha, \xi_\beta, \eta^\beta, \eta^\alpha; x_{\alpha\beta})$, telle que l'on ait

$$\mathcal{L} = {}^{\prime}\partial^{\alpha_1\beta_1}S_{\alpha_1\beta_1} = {}^{p}\partial^{\alpha_1\beta_1}S_{\alpha_1\beta_1} + \frac{\partial S_{\alpha_1\beta_1}}{\partial\xi_{\alpha_2}}\partial^{\alpha_1\beta_1}\xi_{\alpha_1} + \ldots, \tag{14.4}$$

où ${}^{p}\partial$ et ${}^{\prime}\partial$ désignent, respectivement, la dérivation totale et la dérivation partielle. En posant

$$\left.\begin{aligned}&\rho'_{\beta_1\alpha_1}{}^{\alpha_2} = \frac{\partial S_{\beta_1\alpha_1}}{\partial\xi_{\alpha_2}} = \left(-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho_{\beta_1\alpha_1}{}^{\alpha_2}}\right), \qquad \rho'_{\alpha_1\beta_1}{}^{\beta_2} = \frac{\partial S_{\alpha_1\beta_1}}{\partial\xi_{\beta_2}}; \\ &\pi'_{\alpha_1\beta_1\beta_2} = \frac{\partial S_{\alpha_1\beta_1}}{\partial\eta^{\beta_2}}, \qquad \pi'_{\beta_1\alpha_1\alpha_2} = \frac{\partial S_{\beta_1\alpha_1}}{\partial\eta^{\alpha_2}}.\end{aligned}\right\} \tag{14.5}$$

On constate qu'en vertu de la définition de la fonction $\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = -\mathcal{L} & - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho^{\beta_1\alpha_1}{}_{\alpha_2}} \frac{1}{\varkappa} \mathcal{D}^{\beta_1\alpha_1} \xi_{\alpha_2} \\ & - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho^{\alpha_1\beta_1}{}_{\beta_2}} \frac{1}{\varkappa} \mathcal{D}^{*\alpha_1\beta_1} \xi_{\beta_2} \\ & - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi_{\alpha_1\beta_1}{}^{\beta_2}} \frac{1}{\varkappa} \mathcal{D}_{\alpha_1\beta_1} \eta^{\beta_2} \\ & + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi_{\beta_1\alpha_1}{}^{\alpha_2}} \frac{1}{\varkappa} \mathcal{D}^{*}_{\beta_1\alpha_1} \eta_{\alpha_2}, \end{aligned} \qquad (14.6)$$

on obtient l'équation suivante, qui est celle que nous voulions établir :

$$\begin{aligned} {}^{p}\partial^{\alpha_1\beta_1} S_{\alpha_1\beta_1} & - \varepsilon \mathfrak{A}_{\alpha_1\beta_1} \frac{\partial S_{\alpha_1\beta_1}}{\partial \xi_{\alpha_2}} \xi^{\alpha_2} + \varepsilon \mathfrak{A}_{\beta_1\alpha_1} \frac{\partial S_{\beta_1\alpha_1}}{\partial \xi_{\beta_2}} \xi^{\beta_2} \\ & - \varepsilon \mathfrak{A}_{\alpha_1\beta_1} \frac{\partial S_{\alpha_1\beta_1}}{\partial \eta^{\beta_2}} \eta^{\beta_2} - \varepsilon \mathfrak{A}_{\beta_1\alpha_1} \frac{\partial S_{\beta_1\alpha_1}}{\partial \eta^{\alpha_2}} \eta^{\alpha_2} \\ & + \mathcal{H}\Big(\xi_\alpha, \xi_\beta, \eta^\beta, \eta^\alpha ; \\ & \qquad \frac{\partial S_{\alpha_1\beta_1}}{\partial \xi_{\alpha_2}}, \frac{\partial S_{\beta_1\alpha_1}}{\partial \xi_{\beta_2}}, \frac{\partial S_{\alpha_1\beta_1}}{\partial \eta^{\beta_2}}, \frac{\partial S_{\beta_1\alpha_1}}{\partial \eta^{\alpha_2}} \Big) = 0. \end{aligned} \qquad (14.7)$$

Comme au paragraphe 7, on peut démontrer que si

$$\begin{aligned} S_{\alpha_1\beta_1} = S_{\alpha_1\beta_1}(& \xi_\alpha, \xi_\beta, \eta^\beta, \eta^\alpha ; \\ & C'_{\alpha_1\beta_1}{}^{\alpha_2}, C'_{\beta_1\alpha_1}{}^{\beta_2}, d'_{\alpha_1\beta_1}{}^{\beta_2}, d'_{\beta_1\alpha_1}{}^{\alpha_2}) \end{aligned} \qquad (14.8)$$

est une intégrale complète de l'équation (14.7) alors les équations (13.5) jointes aux équations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S_{\alpha_1\beta_1}}{\partial C'_{\alpha_1\beta_1}{}^{\alpha_2}} = a_{\alpha_2}, & \qquad \frac{\partial S_{\beta_1\alpha_1}}{\partial C'_{\alpha_1\beta_1}{}^{\beta_2}} = a^{\beta_2}; \\ \frac{\partial S_{\alpha_1\beta_1}}{\partial d'_{\alpha_1\beta_1}{}^{\beta_2}} = b^{\beta_2}, & \qquad \frac{\partial S_{\beta_1\alpha_1}}{\partial d'_{\beta_1\alpha_1}{}^{\alpha_2}} = b^{\alpha_2}. \end{aligned} \right\} \qquad (14.9)$$

définissent les fonctions ξ_α, ξ_β, η^β, η^α; $\rho'_{\beta_1\alpha_1}{}^{\alpha_2}$, $\rho'_{\alpha_1\beta_1}{}^{\beta_2}$, $\pi'_{\alpha_1\beta_1\beta_2}$, $\pi'_{\beta_1\alpha_1\alpha_2}$ qui sont des solutions des équations canoniques.

15. **Transformations canoniques et invariants intégraux.** — Une famille de transformations à un paramètre vectoriel $x_{\alpha\beta}$.

$$\left. \begin{aligned} & \xi_\alpha = \xi_\alpha(\bar{\xi}_\alpha, \bar{\xi}_\beta, \bar{\eta}^\beta, \bar{\eta}^\alpha; \bar{\rho}'_{\beta_1\alpha_1}{}^{\alpha_2}, \bar{\rho}'_{\alpha_1\beta_1}{}^{\beta_2}, \bar{\pi}'_{\alpha_1\beta_1\beta_2}, \bar{\pi}'_{\beta_1\alpha_1\alpha_2}), \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ & \pi'_{\beta_1\alpha_1\alpha_2} = \pi'_{\beta_1\alpha_1\alpha_2}(\bar{\xi}_\alpha, \dots\dots\dots\dots\dots, \bar{\pi}'_{\beta_1\alpha_1\alpha_2}), \end{aligned} \right\} \qquad (15.1)$$

va définir les transformations canoniques lorsqu'elle jouira de la propriété de garder invariante la forme des équations canoniques.

Considérons la fonction

$$S^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta}(\xi_\alpha, \xi_\beta, \eta^\beta, \eta^\alpha; \bar{\xi}_\alpha, \bar{\xi}_\beta, \bar{\eta}^\beta, \bar{\eta}^\alpha; x_{\alpha\beta}) \qquad (15.2)$$

génératrice des transformations (15.1) satisfaisant l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \delta S^{\beta_1\alpha_1} & = \omega^{\beta_1\alpha_1} - \Omega^{\beta_1\alpha_1} \\ & = \rho'^{\beta_1\alpha_1\alpha_2} \delta\xi_{\alpha_2} + \rho'^{\alpha_1\beta_1\beta_2} \delta\xi_{\beta_2} \\ & \quad + \pi'^{\alpha_1\beta_1}{}_{\beta_2} \delta\eta^{\beta_2} + \pi'^{\beta_1\alpha_1}{}_{\alpha_2} \delta\eta^{\alpha_2} \\ & \quad - \bar{\rho}'^{\beta_1\alpha_1\alpha_2} \delta\bar{\xi}_{\alpha_2} - \bar{\rho}'^{\alpha_1\beta_1\beta_2} \delta\bar{\xi}_{\beta_2} \\ & \quad - \bar{\pi}'^{\alpha_1\beta_1}{}_{\beta_2} \delta\bar{\eta}^{\beta_2} - \bar{\pi}'^{\beta_1\alpha_1}{}_{\alpha_2} \delta\bar{\eta}^{\alpha_2}. \end{aligned} \qquad (15.3)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \omega^{\beta_1\alpha_1} & = \rho'^{\beta_1\alpha_1\alpha_2} \delta\xi_{\alpha_2} + \rho'^{\alpha_1\beta_1\beta_2} \delta\xi_{\beta_2} \\ & \quad + \pi'^{\alpha_1\beta_1}{}_{\beta_2} \delta\eta^{\beta_2} + \pi'^{\beta_1\alpha_1}{}_{\alpha_2} \delta\eta^{\alpha_2}, \\ \Omega^{\beta_1\alpha_1} & = \bar{\rho}'^{\beta_1\alpha_1\alpha_2} \delta\bar{\xi}_{\alpha_2} + \bar{\rho}'^{\alpha_1\beta_1\beta_2} \delta\bar{\xi}_{\beta_2} \\ & \quad + \bar{\pi}'^{\alpha_1\beta_1}{}_{\beta_2} \delta\bar{\eta}^{\beta_2} + \bar{\pi}'^{\beta_1\alpha_1}{}_{\alpha_2} \delta\bar{\eta}^{\alpha_2}. \end{aligned} \right\} \qquad (15.4)$$

L'égalité (15.3) entraîne les équations que voici :

$$\left. \begin{aligned} \rho'^{\beta_1\alpha_1\alpha_2} & = \frac{\partial S^{\beta_1\alpha_1}}{\partial \xi_{\alpha_2}}, \qquad \dots; \\ \bar{\rho}'^{\beta_1\alpha_1\alpha_2} & = -\frac{\partial S^{\beta_1\alpha_1}}{\partial \bar{\xi}_{\alpha_2}}, \qquad \dots. \end{aligned} \right\} \qquad (15.5)$$

Calculons maintenant $\partial_{\beta_1\alpha_1} \omega^{\beta_1\alpha_1}$, on a

$$\begin{aligned} \partial_{\beta_1\alpha_1} \omega^{\beta_1\alpha_1} & = \mathcal{D}^{*}_{\beta_1\alpha_1} \rho'^{\beta_1\alpha_1\alpha_2} \delta\xi_{\alpha_2} \\ & \quad + \rho'^{\beta_1\alpha_1\alpha_2} \delta(\mathcal{D}_{\beta_1\alpha_1} \xi_{\alpha_2}) + \dots \\ & = \xi'^{\alpha_2} \delta\xi_{\alpha_2} + \xi'^{\beta_2} \delta\xi_{\beta_2} \\ & \quad + \eta'_{\beta_2} \delta\eta^{\beta_2} + \eta'_{\alpha_2} \delta\eta^{\alpha_2} \\ & \quad + \rho'^{\beta_1\alpha_1\alpha_2} \delta\rho_{\beta_1\alpha_1\alpha_2} + \rho'^{\alpha_1\beta_1\beta_2} \delta\rho_{\alpha_1\beta_1\beta_2} \\ & \quad + \pi'^{\alpha_1\beta_1\beta_2} \delta\pi_{\alpha_1\beta_1\beta_2} + \pi'^{\beta_1\alpha_1\alpha_2} \delta\pi_{\beta_1\alpha_1\alpha_2} = \delta\mathcal{L}. \end{aligned} \qquad (15.6)$$

Et puisque $\Omega^{\beta_1\alpha_1} = \omega^{\beta_1\alpha_1} - \delta S^{\beta_1\alpha_1}$, il en résulte

$$\partial_{\beta_1\alpha_1} \Omega^{\beta_1\alpha_1} = \delta(\mathcal{L} - \partial_{\beta_1\alpha_1} S^{\beta_1\alpha_1}) = \delta\bar{\mathcal{L}}, \qquad (15.7)$$

$\bar{\mathcal{L}}$ étant la fonction lagrangienne transformée.

Nous sommes alors à même de calculer la fonction $\bar{\mathcal{H}}$ transformée

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}} & = -\bar{\mathcal{L}} + \bar{\rho}'^{\beta_1\alpha_1\alpha_2} \bar{\rho}_{\beta_1\alpha_1\alpha_2} + \bar{\rho}'^{\alpha_1\beta_1\beta_2} \bar{\rho}_{\alpha_1\beta_1\beta_2} \\ & \quad + \bar{\pi}'^{\alpha_1\beta_1\beta_2} \bar{\pi}_{\alpha_1\beta_1\beta_2} + \bar{\pi}'^{\beta_1\alpha_1\alpha_2} \bar{\pi}_{\beta_1\alpha_1\alpha_2} \\ & = \mathcal{H} + {}^{t}\partial_{\beta_1\alpha_1} S^{\beta_1\alpha_1} + \bar{\rho}'^{\beta_1\alpha_1\alpha_2} \bar{\rho}_{\beta_1\alpha_1\alpha_2} + \dots \\ & \quad - \rho'^{\beta_1\alpha_1\alpha_2} \rho_{\beta_1\alpha_1\beta_2} + \dots. \end{aligned} \qquad (15.8)$$

Compte tenu des équations (15.5) et de la relation qui existe entre la divergence totale ${}^{t}\partial_{\beta_1\alpha_1}$ et la divergence partielle ${}^{p}\partial_{\beta_1\alpha_1}$, on obtient finalement

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}(& \bar{\xi}_\alpha, \bar{\xi}_\beta; \bar{\eta}^\beta, \bar{\eta}^\alpha; \\ & \bar{\rho}'^{\beta_1\alpha_1\alpha_2}, \bar{\rho}'^{\alpha_1\beta_1\beta_2}; \bar{\pi}'^{\alpha_1\beta_1\beta_2}, \bar{\pi}'^{\beta_1\alpha_1\alpha_2}; x_{\alpha\beta}) \\ & + \varepsilon \mathfrak{A}_{\beta_1\alpha_1} \frac{\partial S^{\beta_1\alpha_1}}{\partial \bar{\xi}_{\alpha_2}} \bar{\xi}_{\alpha_2} - \varepsilon \mathfrak{A}_{\alpha_1\beta_1} \frac{\partial S^{\beta_1\alpha_1}}{\partial \bar{\xi}_{\beta_2}} \bar{\xi}_{\beta_2} \\ & + \varepsilon \mathfrak{A}_{\beta_1\alpha_1} \frac{\partial S^{\beta_1\alpha_1}}{\partial \bar{\eta}^{\beta_2}} \bar{\eta}^{\beta_2} - \varepsilon \mathfrak{A}_{\alpha_1\beta_1} \frac{\partial S^{\beta_1\alpha_1}}{\partial \bar{\eta}^{\alpha_2}} \bar{\eta}^{\alpha_2} \\ & = \mathcal{H} + {}^{p}\partial_{\beta_1\alpha_1} S^{\beta_1\alpha_1} - \varepsilon \mathfrak{A}_{\beta_1\alpha_1} \frac{\partial S^{\beta_1\alpha_1}}{\partial \xi_{\alpha_2}} \xi_{\alpha_2} + \dots. \end{aligned} \qquad (15.9)$$

Supposons alors que l'on puisse trouver une transformation canonique, qui amène à une fonction

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}} & = -\varepsilon \mathfrak{A}_{\beta_1\alpha_1} \bar{\rho}'^{\beta_1\alpha_1\alpha_2} \bar{\xi}_{\alpha_2} + \varepsilon \mathfrak{A}_{\alpha_1\beta_1} \bar{\rho}'^{\alpha_1\beta_1\beta_2} \bar{\xi}_{\beta_2} \\ & \quad - \varepsilon \mathfrak{A}_{\alpha_1\beta_1} \bar{\pi}'^{\alpha_1\beta_1\beta_2} \eta_{\beta_2} + \varepsilon \mathfrak{A}_{\beta_1\alpha_1} \bar{\pi}'^{\beta_1\alpha_1\alpha_2} \eta_{\alpha_2}. \end{aligned} \qquad (15.10)$$

Il vient alors

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D}_{\beta_1\alpha_1} \bar{\xi}_{\alpha_2} & = -\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial \bar{\rho}'^{\beta_1\alpha_1\alpha_2}} = \varepsilon \mathfrak{A}_{\beta_1\alpha_1} \bar{\xi}_2, \qquad \dots; \\ \mathcal{D}^{*}_{\beta_1\alpha_1} \bar{\rho}'^{\beta_1\alpha_1\alpha_2} & = \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial \bar{\xi}_{\alpha_2}} = -\varepsilon \mathfrak{A}_{\beta_1\alpha_1} \bar{\rho}'^{\beta_1\alpha_1\alpha_2}, \qquad \dots; \end{aligned} \right\} \qquad (15.11)$$

d'où l'on tire des équations suivantes

$$\left.\begin{array}{ll} \partial_{\beta_1\alpha_1}\bar{\xi}_{\alpha_2}=0, & \partial_{\alpha_1\beta_1}\bar{\xi}_{\beta_2}=0; \\ \partial_{\beta_1\alpha_1}\bar{\eta}^{\beta_2}=0, & \partial_{\alpha_1\beta_1}\bar{\eta}^{\alpha_2}=0; \end{array}\right\} \quad (15.12)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \partial_{\alpha_1\beta_1}\rho'^{\alpha_1\beta_1\beta_2}=0, & \partial_{\beta_1\alpha_1}\rho'^{\beta_1\alpha_1\alpha_2}=0; \\ \partial_{\alpha_1\beta_1}\pi'^{\alpha_1\beta_1\beta_2}=0, & \partial_{\beta_1\alpha_1}\pi'^{\alpha_1\beta_1\beta_2}=0. \end{array}\right\} \quad (15.13)$$

Nous voyons ainsi que la recherche de la transformation canonique précitée s'identifie avec la recherche des solutions de l'équation aux dérivées partielles (14.7) du type de Hamilton-Jacobi.

Nous pouvons également définir les *invariants intégraux* en considérant l'espace symbolique des états (ξ_α, ξ_β, η_α, η_β; $\rho'^{\alpha_1\beta_1\beta_2}$, $\rho'^{\beta_1\alpha_1\alpha_2}$, $\pi'^{\alpha_1\beta_1\beta_2}$, $\pi'^{\alpha_1\beta_1\beta_2}$). De l'égalité (15.3) on tire cette conclusion que l'intégrale curviligne $\oint \omega^{\beta_1\alpha_1}$ prise sur une courbe fermé de cet espace, est indépendante de la section de l'espace-temps sur laquelle l'état du système est considéré.

Manuscrit reçu le 19 septembre 1950.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 12, AVRIL 1951, PAGE 542.

SUR LA SECONDE QUANTIFICATION
II. THÉORIE DU POSITRON

Par JEAN G. VALATIN.
Institut Henri Poincaré, Paris (1).

Sommaire. — La représentation des états d'un système d'électrons à l'aide de l'algèbre extérieure est étendue à la théorie du positron. R_+ et R_- étant les sous-espaces de l'espace R des états d'un seul électron de Dirac correspondant à la partie positive et négative du spectre de l'opérateur d'énergie d'un électron libre, R_-^* le dual de R_-, l'espace des états de la théorie du positron est l'espace $\wedge(R_+ + R_-^*)$ des tenseurs antisymétriques de $R_+ + R_-^*$. Ces états peuvent être obtenus comme combinaisons linéaires des produits extérieurs des vecteurs caractérisant l'état des particules individuelles, et les opérateurs de création et d'annihilation peuvent être introduits d'une façon analogue au cas des opérateurs de l'espace $\wedge R$. Les opérateurs **M** définis par (17), (17 *a*) ne contiennent pas les constantes additives souvent infinies des définitions habituelles. Les équations vectorielles $\mathbf{u} = \mathbf{M}\,\mathbf{c}$ sont explicitées.

Dans la première Partie de ce travail [1] nous avons exposé la représentation des états d'un système de particules obéissant au principe d'exclusion à l'aide des notions de l'algèbre extérieure de Grassmann. Celle-ci fournit le cadre naturel pour la description d'un système d'électrons, dans lequel le rôle géométrique des opérateurs de la seconde quantification se présente sous une forme très claire.

L'importance de la méthode de la seconde quantification devient encore plus grande dans la théorie du positron où le nombre des particules du système est en général indéterminé et peut varier du fait de la possibilité de création et d'annihilation de paires. Une représentation géométrique claire des états du système peut être utile en vue d'une meilleure compréhension des nouvelles possibilités fournies par le formalisme de cette théorie, ainsi que de ses difficultés. Nous établissons donc dans cette seconde Partie les modifications du formalisme dues à l'existence des états d'énergie négative de l'électron de Dirac.

(1) Actuellement Universitetets Institut for Teoretisk Fysik, Copenhague.

Les solutions d'énergie négative de l'équation de Dirac. Les sous-espaces R_+ et R_-. — Écrivons l'équation d'onde de Dirac d'un électron libre sous la forme

$$ih\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = W\psi(x,t), \qquad (1)$$

$$W = ic\hbar\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right) - mc^2\beta. \qquad (1\,a)$$

A l'aide d'un système orthonormal complet de spineurs $\varphi_{\underline{r}}(x)$ de carrés sommables, $\psi(x,t)$ peut être développé suivant

$$\psi(x,t) = \sum_{\underline{r}} c^{\underline{r}}(t)\,\varphi_{\underline{r}}(x). \qquad (2)$$

Pour la commodité du langage nous appellerons espace R soit l'espace de Hilbert des coefficients $c^{\underline{r}}$ avec $\sum c^{\underline{r}\,2}$ fini, soit l'espace fonctionnel isomorphe des spineurs $\varphi(x)$.

Le spectre de l'opérateur d'énergie W d'un électron libre a une partie positive et une partie négative.

A ces deux parties du spectre de W correspondent deux sous-espaces de R, R_+ et R_-, définis par les projecteurs

$$\begin{aligned} &\Lambda_+ = \frac{1}{2}(1 + \Lambda), \quad \Lambda_- = \frac{1}{2}(1 - \Lambda), \quad \Lambda = \frac{W}{+\sqrt{W^2}}; \\ &\Lambda_- + \Lambda_+ = 1, \quad \Lambda_+^2 = \Lambda_+, \quad \Lambda_-^2 = \Lambda_-, \\ &\Lambda_+ \Lambda_- = \Lambda_- \Lambda_+ = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Les fonctions $\varphi_r(x)$ de (2) peuvent être choisies de façon à être des éléments soit de R_+ soit de R_-. Une fonction $\varphi_{\underline{r}}(x)$ quelconque sera notée par un indice r souligné; un indice non souligné r correspond à un état d'énergie positive, élément de R_+, un indice primé r' à un état d'énergie négative, élément de R_-.

L'apparition des états d'énergie négative dans la théorie d'un seul électron montre que la théorie d'une seule particule n'est qu'une approximation. La possibilité de création et d'annihilation de paires est un des traits les plus essentiels de la théorie de l'électron relativiste, et la théorie relativiste de l'électron doit être considérée dès le début comme la théorie d'un système de particules.

La théorie des trous. Remplacement de la notion de trou par la notion d'un état de positron. — Selon l'idée de Dirac, on peut associer aux états d'énergie négative d'un électron les états d'énergie positive d'une antiparticule, le positron, en supposant que dans l'état du vide tous les états d'énergie négative de l'électron, c'est à dire tous les états du sous-espace R_-, sont occupés par des électrons, tandis qu'un état non occupé de R_-, un trou dans cette infinité d'électrons, correspond à la présence d'un positron.

Le premier problème de cette théorie des trous est de faire disparaître certains effets de l'infinité des électrons d'énergie négative qui doivent être inobservables. Mais, abstraction faite des difficultés conceptuelles, comme on doit pouvoir décrire également les phénomènes en partant au lieu de l'infinité d'électrons d'énergie négative d'une infinité de positrons d'énergie négative, cette infinité de particules d'énergie négative ne peut avoir aucune signification physique réelle. Il est donc préférable d'exprimer le contenu physique des phénomènes qui se manifestent par la création et l'annihilation réelle ou virtuelle de paires sans faire intervenir les notions de la théorie des trous.

Comme l'ont montré Fock [2] et Furry et Oppenheimer [3], en considérant les opérateurs de création et d'annihilation des électrons d'énergie négative comme des opérateurs d'annihilation et de création de positrons, on peut reformuler la théorie des trous en termes de positrons. Le nombre infini des électrons de la théorie des trous se manifeste par une constante additive infinie dans une partie des opérateurs, dont on peut faire abstraction. Cette constante additive apparait sous une forme plus symétrique par rapport au rôle des électrons et des positrons dans la formulation de Heisenberg [4, 5, 6] et est contenue sous cette forme dans la définition des opérateurs de la théorie covariante de Schwinger [7].

Dans ce qui suit, nous définissons d'abord l'espace des états d'un système d'électrons et de positrons et introduisons ensuite les opérateurs de cet espace. Les opérateurs correspondront ainsi à la contribution des particules présentes, et l'absence des constantes additives « triviales » sera une conséquence logique de la théorie et non le résultat d'une règle de soustraction. Les infinis plus fondamentaux de la théorie du positron apparaissent naturellement de la même façon, mais on peut espérer arriver plus facilement à une compréhension du formalisme en partant d'une représentation simple qui n'introduit pas des constantes additives infinies qu'on peut éviter.

Suivant la manière dont les opérateurs de création et d'annihilation se présentent dans la représentation de l'algèbre extérieure [1], il est évident que le changement du rôle des opérateurs de création et d'annihilation de l'espace R_- des états d'électrons d'énergie négative correspond à la représentation des états de positron par les vecteurs duals de l'espace R_-. Comme nous avons remarqué en (I), dans le cas d'un espace de dimension n finie l'espace des vecteurs duals est isomorphe à l'espace des $(n-1)$-vecteurs représentant un trou dans le n-vecteur complet, ce qui montre la correspondance avec les idées de la théorie des trous. L'état d'un électron libre peut donc être caractérisé par un élément de l'espace R_+, l'état d'un positron libre par un élément de l'espace R_-^*, et les états du système de particules peuvent être caractérisés par les tenseurs antisymétriques de l'espace $R_+ + R_-^*$.

La distinction entre les états d'électron et de positron, la division de R en R_+ et R_-, est liée à la notion de particules libres. L'effet d'un champ extérieur et les interactions entre les particules peuvent être introduits d'une façon relativiste dans la représentation d'interaction.

L'espace $\wedge (R_+ + R^*)$ des états de la théorie du positron. — Soient a_r les éléments de base de l'espace R_+, $a_{r'}$ les éléments de base de l'espace R_-. Les a_r correspondent aux fonctions d'onde d'énergie positive $\varphi_r(x)$ les $a_{r'}$ aux fonctions d'onde d'énergie négative $\varphi_{r'}(x)$ du système orthonormal complet de fonctions $\varphi_{\underline{r}}(x)$ du développement (2). Un élément $\mathbf{c}^1$ de R peut s'écire sous la forme

$$\mathbf{c}^1 = \sum_{\underline{r}} c^{\underline{r}} a_{\underline{r}}. \tag{4 a}$$

Soient a_r^*, $a_{r'}^*$ les éléments de base des espaces duals R_+^*, R_-^*.

Un élément $\mathbf{c}_1$ de R^*_- s'écrit

$$\mathbf{c}_1 = \sum_{r'} c_{r'} a^*_{r'}. \qquad (4\,b)$$

Un vecteur contravariant $(4\,a)$ caractérise un état d'électron, un vecteur covariant $(4\,b)$ un état de positron.

Nous introduisons les tenseurs antisymétriques de l'espace $R_+ + R^*_-$ en définissant la multiplication extérieure des éléments de cet espace par les relations

$$a_{r_1} a_{r_2} + a_{r_2} a_{r_1} = 0, \qquad a^*_{r'_1} a^*_{r'_2} + a^*_{r'_2} a^*_{r'_1} = 0, \qquad (5\,a)$$

$$a_r a^*_{r'} + a^*_{r'} a_r = 0. \qquad (5\,b)$$

En vertu de la dernière relation, l'état d'un système de particules sera également antisymétrique par rapport à la permutation du rôle d'un électron et d'un positron. La théorie sera ainsi, en accord avec la théorie des trous, essentiellement différente d'une théorie dans laquelle l'électron et le positron seraient considérés comme deux particules élémentaires indépendantes. Ceci peut donner des différences remarquables dans les calculs à cause des effets d'échange [8].

Les produits $a_{r_1} a_{r_2} \ldots a_{r_f} a^*_{r'_{f'}} \ldots a^*_{r'_2} a^*_{r'_1}$ de f facteurs a_r et de f' facteurs $a^*_{r'}$ engendrent l'espace $\overset{f+f'}{\wedge} (R_+ + R^*_-)$ des tenseurs antisymétriques de $R\,f$ fois contravariants par les indices r et f' fois covariants par les indices r'. Un élément de cet espace caractérise l'état d'un système de f électrons et de f' positrons. L'espace des états d'un système d'électrons et de positrons, où le nombre des particules peut être indéterminé et peut varier, est l'espace $\wedge (R_+ + R^*_-)$, somme directe des espaces $\overset{f+f'}{\wedge} (R_+ + R^*_-)$,

$$\wedge (R_+ + R^*_-) = \sum_{f, f'=0}^{\infty} \overset{f+f'}{\wedge} (R_+ + R^*_-).$$

Un élément normé de cet espace peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{c} = \sum_{f, f'=0}^{\infty} \sum_{\substack{r_1 < \ldots < r_f \\ r'_1 < \ldots < r'_{f'}}} c^{[r_1 \ldots r_f}{}_{r'_1 \ldots r'_{f'}]} a_{r_1} \ldots a_{r_f} a^*_{r'_{f'}} \ldots a^*_{r'_1}, \qquad (6)$$

$$(\mathbf{c}, \mathbf{c}) = \sum_{f, f'=0}^{\infty} \sum_{\substack{r_1 < \ldots < r_f \\ r'_1 < \ldots < r'_{f'}}} \left| c^{[r_1 \ldots r_f}{}_{r'_1 \ldots r'_{f'}]} \right|^2 = 1. \qquad (6\,a)$$

En introduisant les opérateurs de l'espace $\wedge (R_+ + R^*_-)$, nous écrirons a_r, $a^*_{r'}$, également pour les opérateurs de création des électrons et positrons. En appliquant ces opérateurs de création à l'état, représenté par le tenseur de degré zéro du sous-espace $\overset{0,0}{\wedge} (R_+ + R^*_-)$, où il n'y a aucune particule présente, on obtient les éléments $(4\,a, b)$ de R_+ et R^*_-. Tout élément de $\wedge (R_+ + R^*_-)$ peut être obtenu à partir de ce tenseur de degré zéro par l'application d'une combinaison linéaire de la forme (6) de produits d'opérateurs de création.

La représentation des états à l'aide de l'algèbre extérieure nous paraît plus claire par le fait qu'on ne doit pas définir un état du vide pour arriver aux états du système à l'aide des opérateurs de création. La notion élémentaire est celle des vecteurs $(4\,a, b)$ représentant l'état des particules individuelles, et l'on obtient les états (6) du système comme combinaisons linéaires des produits de ces vecteurs.

La différence $f - f'$ des indices contravariants et covariants d'un tenseur caractérise la charge totale du système. A cause de la conservation de la charge électrique, les opérateurs les plus importants de la théorie sont réductibles aux sous-espaces de $\wedge (R_+ + R^*_-)$ correspondant à une valeur déterminée de $f - f'$. Les éléments de ces sous-espaces sont

. . . .

$$f - f' = 2: \quad \sum_{r_1 < r_2} c^{[r_1 r_2]} a_{r_1} a_{r_2} + \sum_{\substack{r_1 < r_2 < r_3 \\ r'_1}} c^{[r_1 r_2 r_3}{}_{r'_1]} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3} a^*_{r'_1} + \sum_{\substack{r_1 < r_2 < r_3 < r_4 \\ r'_1 < r'_2}} c^{[r_1 r_2 r_3 r_4}{}_{r'_1 r'_2]} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3} a_{r_4} a^*_{r'_2} a^*_{r'_1} + \ldots; \qquad (7\,a)$$

$$f - f' = 1: \quad \sum_{r_1} c^{r_1} a_{r_1} + \sum_{\substack{r_1 < r_2 \\ r'_1}} c^{[r_1 r_2}{}_{r'_1]} a_{r_1} a_{r_2} a^*_{r'_1} + \sum_{\substack{r_1 < r_2 < r_3 \\ r'_1 < r'_2}} c^{[r_1 r_2 r_3}{}_{r'_1 r'_2]} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3} a^*_{r'_2} a^*_{r'_1} + \ldots; \qquad (7\,b)$$

$$f - f' = 0: \quad c_0 + \sum_{\substack{r_1 \\ r'_1}} c^{[r_1}{}_{r'_1]} a_{r_1} a^*_{r'_1} + \sum_{\substack{r_1 < r_2 \\ r'_1 < r'_2}} c^{[r_1 r_2}{}_{r'_1 r'_2]} a_{r_1} a_{r_2} a^*_{r'_2} a^*_{r'_1} + \ldots; \qquad (7\,c)$$

$$f - f' = -1: \quad \sum_{r'_1} c_{r'_1} a^*_{r'_1} + \sum_{\substack{r_1 \\ r'_1 < r'_2}} c^{[r_1}{}_{r'_1 r'_2]} a_{r_1} a^*_{r'_2} a^*_{r'_1} + \sum_{\substack{r_1 < r_2 \\ r'_1 < r'_2 < r'_3}} c^{[r_1 r_2}{}_{r'_1 r'_2 r'_3]} a_{r_1} a_{r_2} a^*_{r'_3} a^*_{r'_2} a^*_{r'_1} + \ldots; \qquad (7\,d)$$

$$f - f' = -2: \quad \sum_{r'_1 < r'_2} c_{[r'_1 r'_2]} a^*_{r'_2} a^*_{r'_1} + \sum_{\substack{r_1 \\ r'_1 < r'_2 < r'_3}} c^{[r_1}{}_{r'_1 r'_2 r'_3]} a_{r_1} a^*_{r'_3} a^*_{r'_2} a^*_{r'_1} + \sum_{\substack{r_1 < r_2 \\ r'_1 < r'_2 < r'_3 < r'_4}} c^{[r_1 r_2}{}_{r'_1 r'_2 r'_3 r'_4]} a_{r_1} a_{r_2} a^*_{r'_4} a^*_{r'_3} a^*_{r'_2} a^*_{r'_1} + \ldots; \qquad (7\,e)$$

. . . .

Les opérateurs de l'espace $\wedge (R_+ + R_-^*)$. — Les opérateurs linéaires de l'espace $\wedge (R_+ + R_-^*)$ peuvent être introduits d'une façon analogue [1] aux opérateurs de l'espace $\wedge R$. Ils peuvent être exprimés à l'aide des opérateurs de création et d'annihilation.

Les opérateurs de création a_r, $a_{r'}^*$ sont définis comme des multiplications extérieures par les vecteurs correspondants de l'espace $R_+ + R_-^*$. Ils augmentent le degré d'un tenseur d'une unité. On a [conformément à I (27)]

$$\left.\begin{aligned} a_r \mid a_{r_1} \ldots a_{r_f} a^*_{r'_{f'}} \ldots a^*_{r'_1} &= a_r a_{r_1} \ldots a_{r_f} a^*_{r'_{f'}} \ldots a^*_{r'_1} \\ &(= 0, \text{ si } r = r_k), \\ a^*_{r'} \mid a_{r_1} \ldots a_{r_f} a^*_{r'_{f'}} \ldots a^*_{r'_1} &= a^*_{r'} a_{r_1} \ldots a_{r_f} a^*_{r'_{f'}} \ldots a^*_{r'_1} \\ &(= 0, \text{ si } r' = r'_k). \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

L'ordre des facteurs peut être ramené à l'ordre conventionnel à l'aide des règles d'anticommutation (5 *a*, *b*).

Les opérateurs d'annihilation a_r^*, $a_{r'}$ sont définis comme une espèce de division sans reste par les éléments de base correspondants. Ils diminuent le degré d'un tenseur d'une unité. On a conformément à I (28)

$$\left.\begin{aligned} a_r^* \mid a_{r_1} \ldots a_{r_f} a^*_{r'_{f'}} \ldots a^*_{r'_1} &= \begin{cases} (-1)^{k-1} a_{r_1} \ldots a_{r_{k-1}} a_{r_{k+1}} \ldots a_{r_f} a^*_{r'_{f'}} \ldots a^*_{r'_1} & \text{si } r = r_k, \\ 0 & \text{si } r \neq r_k; \end{cases} \\ a_{r'} \mid a_{r_1} \ldots a_{r_f} a^*_{r'_{f'}} \ldots a^*_{r'_1} &= \begin{cases} (-1)^{f+f'-k} a_{r_1} \ldots a_{r_f} a^*_{r'_{f'}} \ldots a^*_{r'_{k+1}} a^*_{r'_{k-1}} \ldots a^*_{r'_1} & \text{si } r' = r'_k, \\ 0 & \text{si } r' \neq r'_k. \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

A l'aide de ces définitions [et des relations analogues à I (29 *a*, *b*)] on peut vérifier les relations d'anticommutation des opérateurs de création et d'annihilation a_r, a_s^* :

$$\left.\begin{aligned} a_{\underline{r}} a_{\underline{s}} + a_{\underline{s}} a_{\underline{r}} = 0, \qquad a^*_{\underline{r}} a^*_{\underline{s}} + a^*_{\underline{s}} a^*_{\underline{r}} = 0, \\ a^*_{\underline{r}} a_{\underline{s}} + a_{\underline{s}} a^*_{\underline{r}} = \delta_{\underline{r}\underline{s}}; \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

où les indices r peuvent être les indices r des éléments de R_+ ou les indices r' de R_-^*.

Les opérateurs $n_r = a_r a_r^*$, $n_{r'} = a^*_{r'} a_{r'}$ sont les projecteurs des états du système dans lesquels l'état r est occupé par un électron ou l'état r' par un positron. Comme le nombre des particules peut varier par la création et l'annihilation de paires, tandis que la charge totale du système est conservée, l'opérateur le plus important de la théorie du positron est l'opérateur de la charge totale

$$\mathbf{Q} = \sum_r a_r a_r^* - \sum_{r'} a^*_{r'} a_{r'} = \sum_r n_r - \sum_{r'} n_{r'}, \quad (11)$$

$\mathbf{Q}$ a les valeurs propres $f - f'$ et les vecteurs propres (7).

Les opérateurs M et les constantes additives. — Ayant défini l'espace $\wedge (R_+ + R_-^*)$ comme l'espace des états d'un système d'électrons, les quantités mesurables de la théorie seront représentées par des opérateurs hermitiens de cet espace. Les opérateurs les plus simples de $\wedge (R_+ + R_-^*)$ sont les opérateurs dont les termes contiennent un facteur covariant et un facteur contravariant. Ils peuvent être écrits sous la forme

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{++} + \mathbf{M}_{--} + \mathbf{M}_{+-} + \mathbf{M}_{-+}; \quad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{M}_{++} = \sum_{rs} M_{rs}\, a_r a_s^*, \quad \mathbf{M}_{--} = \sum_{r's'} (-M_{r's'}) a^*_{s'} a_{r'}; \\ \mathbf{M}_{+-} = \sum_{rs'} M_{rs'} a_r a^*_{s'}, \quad \mathbf{M}_{-+} = \sum_{r's} M_{r's} a_{r'} a_s^*. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Le rôle des quatre opérateurs (13) est différent et leur sens physique peut être bien distinct. $\mathbf{M}_{++}$ est un opérateur de l'espace $\wedge R_+$, $\mathbf{M}_{--}$ un opérateur de l'espace $\wedge R_-^*$. Tous les deux laissent invariant le nombre des particules. L'opérateur $\mathbf{M}_{+-}$ augmente d'une unité le nombre des électrons et celui des positrons, et correspond ainsi à la création d'une paire. $\mathbf{M}_{-+}$ diminue d'une unité le nombre des électrons et des positrons et correspond à l'annihilation d'une paire. La valeur moyenne des opérateurs $\mathbf{M}_{+-}$, $\mathbf{M}_{-+}$ est nulle dans un état où le nombre des particules a une valeur définie.

On peut écrire avec une notation abrégée pour l'opérateur $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M} = \sum_{\underline{r}\underline{s}} M_{\underline{r}\underline{s}} \overbrace{a_{\underline{r}} a^*_{\underline{s}}}. \quad (12\,a)$$

La signification du signe $\overbrace{\quad}$ est selon (12), (13) dans le cas $r = r'$, $s = s'$, $\overbrace{a_{r'} a^*_{s'}} = -a^*_{s'} a_{r'}$. $\mathbf{M}$ diffère ainsi de l'opérateur $\sum_{\underline{r}\underline{s}} M_{\underline{r}\underline{s}} a_{\underline{r}} a^*_{\underline{s}}$ de l'espace $\wedge R$ par la constante additive, finie ou infinie, $\sum_{r'} M_{r'r'}$.

Nous avons choisi dans les expressions (13) une notation des coefficients M_{rs} qui n'est pas symétrique dans le rôle des électrons et des positrons,

pour faciliter la comparaison de **M** avec les opérateurs formés à l'aide des éléments de matrice

$$(\underline{r} \mid M \mid \underline{s}) = \int \varphi_{\underline{r}}^{*} M \varphi_{\underline{s}}\, \mathrm{d}x \tag{14}$$

d'un opérateur M de l'espace R des états de la théorie d'un seul électron. Cependant, tandis que dans la théorie de l'électron non relativiste il existe une correspondance simple entre les opérateurs M de R et les opérateurs $\sum_{rs} (\underline{r} \mid M \mid \underline{s})\, a_{\underline{r}}\, a_{\underline{s}}^{*}$ de l'espace $\wedge\, R$ des états du système de particules, la relation

$$M_{\underline{r}\,\underline{s}} = (\underline{r} \mid M \mid \underline{s}) \tag{15}$$

entre les coefficients de l'opérateur (12 *a*) de la théorie du positron et les éléments de matrice (14) ne conserve pas toujours le sens physique des opérateurs [9], et *a priori* il est bon de distinguer entre les deux notions.

On pourrait écrire au lieu de (12 *a*) avec une autre notation $\sum_{rs} M'_{\underline{r}\,\underline{s}}\, \widehat{a_{\underline{r}}^{*}\, a_{\underline{s}}}$, un opérateur qui diffère de l'opérateur $\sum_{rs} M'_{\underline{r}\,\underline{s}}\, a_{\underline{r}}^{*}\, a_{\underline{s}}$ de l'espace $\wedge\, R'$ par la constante $\sum_{r} M'_{rr}$ et établir ainsi une relation avec les opérateurs de l'espace R^{*} correspondant aux états des positrons. Les opérateurs (12 *a*) de l'espace $\wedge\, (R_{+} + R_{-}^{*})$ des états de la théorie du positron ne doivent donc pas être considérés comme résultant de la soustraction d'une constante des opérateurs de $\wedge\, R$ ou de $\wedge\, R^{*}$, ou par une prescription de symétrisation.

En introduisant les opérateurs

$$\left.\begin{aligned}
\Psi_{+}(x, o) &= \sum_{r} \varphi_{r}(x)\, a_{r}^{*}, \\
\Psi_{-}(x, o) &= \sum_{r'} \varphi_{r'}(x)\, a_{r'}^{*}, \\
\Psi_{+}^{*}(x, o) &= \sum_{r} \varphi_{r}^{*}(x)\, a_{r}, \\
\Psi_{-}^{*}(x, o) &= \sum_{r'} \varphi_{r'}^{*}(x)\, a_{r'};
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Psi(x, o) &= \Psi_{+}(x, o) + \Psi_{-}(x, o), \\
\Psi^{*}(x, o) &= \Psi_{+}^{*}(x, o) + \Psi_{-}^{*}(x, o);
\end{aligned}\right\} \tag{16 a}$$

où les fonctions d'onde $\varphi_{r}(x) = \psi_{r}(x, o)$ sont des spineurs à quatre composantes, avec $M_{\underline{r}\,\underline{s}} = (\underline{r} \mid M \mid s)$ on peut écrire les opérateurs (13) sous la forme

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{M}_{++} &= \int \Psi_{+}^{*}(x, o) M\, \Psi_{+}(x, o)\, \mathrm{d}^{3}x, \\
\mathbf{M}_{--} &= -\int \Psi_{-}(x, o)\, \Psi_{-}^{*}(x, o) M\, \mathrm{d}^{3}x, \\
\mathbf{M}_{+-} &= \int \Psi_{+}^{*}(x, o) M\, \Psi_{-}(x, o)\, \mathrm{d}^{3}x \\
&= -\int \Psi_{-}(x, o)\, \Psi_{+}^{*}(x, o) M\, \mathrm{d}^{3}x, \\
\mathbf{M}_{-+} &= -\int \Psi_{-}(x, o)\, \Psi_{+}^{*}(x, o) M\, \mathrm{d}^{3}x \\
&= \int \Psi_{-}^{*}(x, o) M\, \Psi_{-}(x, o)\, \mathrm{d}^{3}x.
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Cette notation peut être considérée comme symétrique par rapport aux espaces R_{+} et R_{-}^{*} des états des électrons et des positrons. A l'aide de (17) on peut former les deux opérateurs

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{++} + \mathbf{M}_{--} + \mathbf{M}_{+-} + \mathbf{M}_{-+} \tag{17 a}$$

et

$$\mathbf{M}_{\wedge} = \mathbf{M}_{++} - \mathbf{M}_{--}, \tag{17 b}$$

qui correspondent avec des sens physique différents à l'opérateur M de la théorie d'un seul électron [9].

Par une transformation unitaire, on obtient des opérateurs (16) de la représentation de Schrödinger les opérateurs $\Psi_{\pm}(x, t)$, $\Psi_{\pm}^{*}(x, t)$ de la représentation d'interaction qui satisfont aux équations de Dirac d'un électron libre et ont des relations d'anticommutation invariantes relativistes. En écrivant au lieu de (16) ces opérateurs dans les expressions (17), on obtient les opérateurs correspondants dans la représentation d'interaction.

Les opérateurs $\Psi_{+}(x, o)$, $\Psi_{-}^{*}(x, o)$ sont formés à l'aide des opérateurs d'annihilation, les opérateurs $\Psi_{+}^{*}(x, o)$, $\Psi_{-}(x, o)$ à l'aide des opérateurs de création de la théorie du positron. Ils jouent ainsi un rôle plus fondamental que les combinaisons

$$\Psi(x, o) = \Psi_{+}(x, o) + \Psi_{-}(x, o)$$

et

$$\Psi^{*}(x, o) = \Psi_{+}^{*}(x, o) + \Psi_{-}^{*}(x, o).$$

Les opérateurs (17 *a*, *b*) exprimés à l'aide de ces opérateurs ne contiennent pas de constantes additives. Il n'y a aucune raison de considérer les opérateurs

$$\int \Psi^{*}(x, o) M\, \Psi(x, o)\, \mathrm{d}^{3}x \tag{18}$$

ou

$$\frac{1}{2}\left\{ \int \Psi^{*}(x, o) M\, \Psi(x, o)\, \mathrm{d}^{3}x - \int \Psi(x, o)\, \Psi^{*}(x, o) M\, \mathrm{d}^{3}x \right\} \tag{19}$$

ou

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\{ \int \Psi^{*}(x, o) M\, \Psi(x, o)\, \mathrm{d}^{3}x \pm \int \Psi'^{*}(x, o) M\, \Psi'(x, o)\, \mathrm{d}^{3}x \right\}, \\
&\Psi'^{*}(x, o) = C\, \Psi(x, o), \quad \Psi'(x, o) = C^{-1}\, \Psi^{*}(x, o),
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

comme plus fondamentaux. (18) représente l'opérateur de la théorie des trous. Comme opérateur de l'espace $\wedge(R_+ + R_-^*)$ il contient une constante additive, souvent infinie. (19) correspond à la prescription de Heisenberg [5], où l'opérateur (18) de l'espace $\wedge R$ de la théorie des trous avec une infinité d'électrons d'énergie négative est symétrisé à l'aide d'un opérateur de l'espace $\wedge R^*$ des états de la théorie des trous avec une infinité de positrons d'énergie négative. Pour les opérateurs de la théorie du positron représentant des quantités changeant de signe avec la charge des particules [9], la constante additive de l'opérateur (19) disparaît. Les opérateurs de la théorie du positron indépendants du signe de la charge contiennent cependant selon (19) une constante additive finie ou infinie. (20) correspond avec $\Psi(x, t)$ au lieu de $\Psi(x, 0)$ à la définition de Schwinger des opérateurs de la théorie du positron, et il est identique à (19) si l'on choisit le signe + dans le cas d'opérateurs hermitiens indépendants du signe de la charge et le signe — dans le cas d'opérateurs hermitiens changeant de signe avec la charge.

Les équations $\mathbf{u} = \mathbf{M} \mid \mathbf{c}$. — A l'aide des définitions (8), (9) des opérateurs et les règles d'anticommutation (5 *a*, *b*) du produit extérieur, on peut facilement calculer dans l'espace $\wedge(R_+ + R_-^*)$ avec des équations contenant des vecteurs et des opérateurs. Pour les opérateurs (13) on a [*voir* aussi I (48)],

$$\mathbf{M}_{++} \mid \mathbf{c} = \sum_{rs} M_{rs}\, a_r a_s^* \mid \sum_{f,f'=0}^{\infty} \sum_{\substack{r_1<\ldots<r_f \\ r'_1<\ldots<r'_{f'}}} c^{[r_1\ldots r_f\, r'_1\ldots r'_{f'}]}\, a_{r_1}\ldots a_{r_f} a^*_{r'_{f'}}\ldots a^*_{r'_1}$$

$$= \sum_{f,f'=0}^{\infty} \sum_{\substack{r_1<\ldots<r_f \\ r'_1<\ldots<r'_{f'}}} \left\{ \sum_{k=1}^{f} \sum_{r} M_{r_k r}\, c^{[r_1\ldots r_{k-1}\, r\, r_{k+1}\ldots r_f\, r'_1\ldots r'_{f'}]} \right\} a_{r_1}\ldots a_{r_f} a^*_{r'_{f'}}\ldots a^*_{r'_1}, \tag{21 a}$$

$$\mathbf{M}_{--} \mid \mathbf{c} = \sum_{r's'} (-M_{r's'})\, a^*_{s'} a_{r'} \mid \sum_{f,f'=0}^{\infty} \sum_{\substack{r_1<\ldots<r_f \\ r'_1<\ldots<r'_{f'}}} c^{[r_1\ldots r_f\, r'_1\ldots r'_{f'}]}\, a_{r_1}\ldots a_{r_f} a^*_{r'_{f'}}\ldots a^*_{r'_1}$$

$$= \sum_{f,f'=0}^{\infty} \sum_{\substack{r_1<\ldots<r_f \\ r'_1<\ldots<r'_{f'}}} \left\{ -\sum_{k=1}^{f'} \sum_{r'} M_{r' r'_k}\, c^{[r_1\ldots r_f\, r'_1\ldots r'_{k-1}\, r'\, r'_{k+1}\ldots r'_{f'}]} \right\} a_{r_1}\ldots a_{r_f} a^*_{r'_{f'}}\ldots a^*_{r'_1}, \tag{21 b}$$

$$\mathbf{M}_{+-} \mid \mathbf{c} = \sum_{rs'} M_{rs'}\, a_r a^*_{s'} \mid \sum_{f,f'=0}^{\infty} \sum_{\substack{r_1<\ldots<r_f \\ r'_1<\ldots<r'_{f'}}} c^{[r_1\ldots r_f\, r'_1\ldots r'_{f'}]}\, a_{r_1}\ldots a_{r_f} a^*_{r'_{f'}}\ldots a^*_{r'_1}$$

$$= \sum_{f,f'=1}^{\infty} \sum_{\substack{r_1<\ldots<r_f \\ r'_1<\ldots<r'_{f'}}} \left\{ \sum_{k=1}^{f} \sum_{l=1}^{f'} (-1)^{k+f+f'-l} M_{r_k r'_l}\, c^{[r_1\ldots r_{k-1} r_{k+1}\ldots r_f\, r'_1\ldots r'_{l-1} r'_{l+1}\ldots r'_{f'}]} \right\} a_{r_1}\ldots a_{r_f} a^*_{r'_{f'}}\ldots a^*_{r'_1}, \tag{21 c}$$

$$\mathbf{M}_{-+} \mid \mathbf{c} = \sum_{r's} M_{r's}\, a_{r'} a_s^* \mid \sum_{f,f'=0}^{\infty} \sum_{\substack{r_1<\ldots<r_f \\ r'_1<\ldots<r'_{f'}}} c^{[r_1\ldots r_f\, r'_1\ldots r'_{f'}]}\, a_{r_1}\ldots a_{r_f} a^*_{r'_{f'}}\ldots a^*_{r'_1}$$

$$= \sum_{f,f'=0}^{\infty} \sum_{\substack{r_1<\ldots<r_f \\ r'_1<\ldots<r'_{f'}}} \left\{ \sum_{rr'} M_{r'r}\, c^{[r_1\ldots r_f\, r\, r'_1\ldots r'_{f'}\, r']} \right\} a_{r_1}\ldots a_{r_f} a^*_{r'_{f'}}\ldots a^*_{r'_1}. \tag{21 d}$$

En écrivant

$$\mathbf{u} = \mathbf{M} \mid \mathbf{c} = \sum_{f,f'=0}^{\infty} \sum_{\substack{r_1<\ldots<r_f \\ r'_1<\ldots<r'_{f'}}} u^{[r_1\ldots r_f\, r'_1\ldots r'_{f'}]}\, a_{r_1}\ldots a_{r_f} a^*_{r'_{f'}}\ldots a^*_{r'_1}, \tag{22}$$

on a, avec $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{++} + \mathbf{M}_{--} + \mathbf{M}_{+-} + \mathbf{M}_{-+}$ et (21 *a*, *b*, *c*, *d*) :

$$
\begin{aligned}
u^{[r_1 \ldots r_f}{}_{r'_1 \ldots r'_{f'}]} = & \sum_{k=1}^{f} \sum_{r} M_{r_k r}\, c^{[r_1 \ldots r_{k-1} r r_{k+1} \ldots r_f}{}_{r'_1 \ldots r'_{f'}]} \\
& - \sum_{k=1}^{f'} \sum_{r'} M_{r' r'_k}\, c^{[r_1 \ldots r_f}{}_{r'_1 \ldots r'_{k-1} r' r'_{k+1} \ldots r'_{f'}]} \\
& + \sum_{k=1}^{f} \sum_{i=1}^{f'} (-1)^{k+f+f'-i} \\
& \quad M_{r_k r'_i}\, c^{[r_1 \ldots r_{k-1} r_{k+1} \ldots r_f}{}_{r'_1 \ldots r'_{i-1} r'_{i+1} \ldots r'_{f'}]} \\
& + \sum_{rr'} M_{r'r}\, c^{[r_1 \ldots r_f r}{}_{r'_1 \ldots r'_{f'} r']}.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

L'opérateur $\mathbf{M}$ commute avec l'opérateur $\mathbf{Q}$ de la charge totale. A un élément (7) du sous-espace de $\wedge (R_+ + R_-^*)$ correspondant à une valeur propre $f - f'$ de $\mathbf{Q}$ appartient selon (22), (23) un élément $\mathbf{u}$ du même sous-espace. En explicitant (23) pour les valeurs $f - f' = 0,\ 1,\ -1$ de la charge, on a

$$
\left.
\begin{aligned}
f - f' = 0: \quad & u_0 = \sum_{rr'} M_{r'r}\, c^{r}{}_{r'}, \\
& u^{r_1}{}_{r'_1} = \sum_{r} M_{r_1 r}\, c^{r}{}_{r'_1} - \sum_{r'} M_{r' r'_1}\, c^{r_1}{}_{r'} + M_{r_1 r'_1}\, c_0 \\
& \qquad + \sum_{rr'} M_{r'r}\, c^{[r_1 r}{}_{r'_1 r']};
\end{aligned}
\right\} \tag{24}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
f - f' = 1: \quad & u^{r_1} = \sum_{r} M_{r_1 r}\, c^{r} + \sum_{r'r} M_{r'r}\, c^{[r_1 r}{}_{r']}, \\
& u^{[r_1 r_2}{}_{r'_1]} = \sum_{r} (M_{r_1 r}\, c^{[r r_2}{}_{r'_1]} + M_{r_2 r}\, c^{[r_1 r}{}_{r'_1]}) \\
& \qquad - \sum_{r'} M_{r' r'_1}\, c^{[r_1 r_2}{}_{r']} + M_{r_2 r'_1}\, c^{r_1} - M_{r_1 r'_1}\, c^{r_2} \\
& \qquad + \sum_{rr'} M_{r'r}\, c^{[r_1 r_2 r}{}_{r'_1 r']};
\end{aligned}
\right\} \tag{25}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
f - f' = -1: \quad & u_{r'_1} = -\sum_{r'} M_{r' r'_1}\, c_{r'} + \sum_{rr'} M_{r'r}\, c^{r}{}_{r'_1 r'}, \\
& u^{r_1}{}_{r'_1 r'_2} = \sum_{r} M_{r_1 r}\, c^{r}{}_{r'_1 r'_2} \\
& \qquad - \sum_{r'} (M_{r' r'_1}\, c^{r_1}{}_{r' r'_2]} + M_{r' r'_2}\, c^{r_1}{}_{r'_1 r']}) \\
& \qquad + M_{r_1 r'_2}\, c_{r'_1} - M_{r_1 r'_1}\, c_{r'_2} + \sum_{r'r} M_{r'r}\, c^{[r_1 r}{}_{r'_1 r'_2 r']}.
\end{aligned}
\right\} \tag{26}
$$

Abstraction faite des différences de signe dues à des notations différentes, les relations (23), (24), (25), (26) diffèrent des relations correspondantes de Furry et Oppenheimer [*loc. cit.* [3], équations (2.31), (2.33), (2.34), (2.35)] par les facteurs numériques qui interviennent dans les coefficients du développement de la fonction d'onde dans l'espace de configuration en choisissant une base dans l'espace de toutes les fonctions de f particules au lieu des déterminants de Slater constituant la base des fonctions d'onde antisymétriques. [Il est à remarquer que les facteurs numériques de Furry et Oppenheimer correspondent à des facteurs de normalisation $\sqrt{f!}\sqrt{f'!}$. Pour obtenir des fonctions d'onde correctement normalisées dans l'espace de configuration, il faut choisir des facteurs de normalisation $\sqrt{(f + f')!}$. Ces derniers correspondent à des fonctions d'onde antisymétriques par rapport à la permutation des rôles d'un électron et d'un positron, les premiers à des fonctions d'onde qui ne sont antisymétriques que par rapport à la permutation des rôles de deux électrons ou de deux positrons.]

Il n'est pas nécessaire cependant de considérer ces équations comme des équations dans l'espace de configuration, bien qu'avec une fonction d'onde antisymétrique développée selon des déterminants de Slater les équations des coefficients $c^{[r_1 \ldots r_f}{}_{r'_1 \ldots r'_{f'}]}$ représentent aussi les équations de l'espace de configuration. Mais elles peuvent être également considérées comme des équations entre les coefficients des éléments (6) de l'espace $\wedge (R_+ + R_-^*)$ des états du système dans la représentation de la seconde quantification. Là où l'ordre des indices des coefficients diffère de l'ordre lexicographique

$$r_1 < \ldots < r_f < \ldots < r'_1 < \ldots < r'_{f'} < \ldots$$

les notations employées marquent seulement que pour simplifier l'écriture, nous avons inclu une puissance de (-1) dans les $c^{[r_1 \ldots r_f}{}_{r'_1 \ldots r'_{f'}]}$. Il serait cependant presque impossible d'écrire les mêmes équations avec la notation habituelle des coefficients

$$
\begin{aligned}
c^{[r_1 r_2 \ldots r_f}{}_{r'_1 \ldots r'_{f'}]} = g(& 0, \ldots, 1_{r_1}, \ldots, 0, \ldots, 1_{r_2}, \ldots, 1_{r_f}, \ldots; \\
& 0, \ldots, 1_{r'_1}, \ldots, 0, \ldots, 1_{r'_{f'}}, \ldots).
\end{aligned}
$$

Les états des particules libres et la représentation d'interaction. — La définition des états d'électrons et de positrons, et de l'espace $\wedge (R_+ + R_-^*)$ est liée au spectre de l'opérateur d'énergie d'une particule libre. La théorie prend une forme plus relativiste dans la représentation d'interaction, en caractérisant les états des électrons et des positrons de R_+ et de R_-^* par des fonctions d'onde ayant une variation temporelle conforme aux équations d'onde de Dirac des particules libres. L'effet des champs extérieurs et des interactions se manifeste alors dans la variation temporelle des coefficients des éléments de l'espace $\wedge (R_+ + R_-^*)$.

Soit l'équation d'onde du système d'électrons dans la représentation de Schrödinger :

$$
\left.
\begin{aligned}
i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{\Phi} &= \mathbf{H}_1 | \mathbf{\Phi}, \\
\mathbf{H} &= \mathbf{W} + \mathbf{W}_1.
\end{aligned}
\right\} \tag{27}
$$

L'état Φ du système est un élément de la forme (6) de l'espace $\wedge\,(R_- + R_+^*)$. L'opérateur $\mathbf{W}$ représente l'énergie des particules libres, $\mathbf{W}_1$ l'énergie d'interaction avec un champ extérieur et les interactions entre les électrons et les positrons.

On arrive à la représentation d'interaction par une transformation canonique :

$$\Phi = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{W}t}\,|\,\Phi_v, \qquad \Phi_v = e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{W}t}\,|\,\Phi, \qquad (28)$$

où Φ_v satisfait l'équation d'onde

$$\left.\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi_v &= \mathbf{V}_1\,\Phi_v,\\ \mathbf{V}_1 &= e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{W}t}\,\mathbf{W}_1\,e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{W}t}. \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

On peut naturellement remplacer la variation en fonction du paramètre t par des expressions plus covariantes correspondant à des hypersurfaces de l'espace-temps, mais la covariance relativiste de la théorie ne dépend que de la forme de l'opérateur $\mathbf{V}_1$.

Étant donné le rôle joué par les espaces R_+ et R_-, il apparaît que dans la théorie du positron la représentation d'interaction n'est pas seulement une représentation toujours possible, mais que les états des particules libres jouent un rôle primordial dans les bases mêmes de la théorie. Dans certains champs extérieurs il est encore possible de faire une distinction nette entre les états d'énergie positive et négative d'un électron. Les champs analogues à ceux qui donnent lieu au paradoxe de Klein ne permettent cependant plus cette distinction d'une façon univoque, et la plupart des exemples mathématiques qu'on peut construire semble-t-être de ce type [3, 10]. D'autre part, même si l'on peut définir R_+ et R_- dans un champ extérieur donné, cette définition est liée au champ spécial considéré et doit être changée pour un champ différent.

Du point de vue des calculs, l'introduction des fonctions d'onde d'une particule dans un champ extérieur, ou une transformation canonique correspondante, peut présenter de grands avantages. La manière dont les résultats peuvent se traduire dans la représentation des particules libres a été montrée par Furry et Oppenheimer [3]. A un électron dans un champ extérieur correspond ainsi en général un état du type (6) du système d'électrons avec un nombre indéterminé de particules. L'apparition de ces états dans la théorie du positron constitue un élément tout à fait nouveau dans le formalisme quantique et les possibilités mathématiques qu'ils représentent sont encore loin d'être bien comprises et méritent d'être étudiées.

La mesure des quantités représentées par des opérateurs qui ne commutent pas avec l'opérateur du nombre des particules est également liée à de tels états comprenant un nombre indéterminé de particules. Le sens physique des expressions divergentes qui apparaissent en relation avec ces opérateurs devrait être analysé en étudiant les effets de création et d'annihilation de paires liés à la mesure de ces quantités [11].

Manuscrit reçu le 16 juillet 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] VALATIN J. G. — *J. Physique Rad.*, 1951, **12**, 131 désigné dans le texte par I.
[2] FOCK V. — *C. R. Leningrad*, 1933, n° **6**, 267.
[3] FURRY W. H. et OPPENHEIMER J. R. — *Phys. Rev.*, 1934, **45**, 245, 343.
[4] HEISENBERG W. — *Z. Physik*, 1934, **90**, 209, **92**, 692.
[5] PAULI W. — *Rev. Mod. Phys.*, 1941, **13**, 203.
[6] Pour une bibliographie plus complète des publications sur la théorie du positron, *voir* A. PAIS, Developments in the Theory of the Electron, Princeton, 1948.
[7] SCHWINGER J. — *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 1439; 1949, **75**, 651; **76**, 790.
[8] BHABHA H. J. — *Proc. Roy. Soc.* A, 1936, **154**, 195.
[9] VALATIN J. G. — *C. R. Acad. Sc.*, 1950, **230**, 822, 925.
[10] PLESSET M. S. — *Phys. Rev.*, 1932, **41**, 278.
[11] *Voir* HEISENBERG W. — *Verh. Sachs. Ak.*, Leipzig, 1934, **86**, 317. — BOHR N. et ROSENFELD L. — *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 794.

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE L'ABSORPTION DES HALOGÉNURES DE MÉTHYLE DANS LA RÉGION DE 1,6 μ

Par Mme R. MATHIS-NOËL.
Laboratoire de Physique du P. C. B.

Sommaire. — On a observé, dans la région de 1,6 μ, deux groupes de bandes, un doublet (∥ + ⊥) attribué à l'harmonique $2\nu_2$, et plusieurs bandes perpendiculaires qui paraissent pouvoir être attribuées à la combinaison d'une bande fondamentale perpendiculaire et d'un ensemble de bandes parallèles dues à la résonance de Fermi.

L'étude des spectres de vibration-rotation des molécules CH_3X (X = F, Cl, Br, I), a montré [1] qu'elles appartiennent au groupe de symétrie C_3v, l'atome de carbone et l'atome d'halogène se trouvant sur l'axe de symétrie ternaire (structure confirmée par d'autres méthodes physiques ou physico-chimiques). Leurs vibrations fondamentales sont au nombre de six, dont trois totalement symétriques parallèles A_1 (ν_1, ν_3, ν_5), et trois dégénérées perpendiculaires (ν_2, ν_4, ν_6). Toutes sont actives en infrarouge et en Raman; en gros, on peut attribuer (*fig.* 1) :

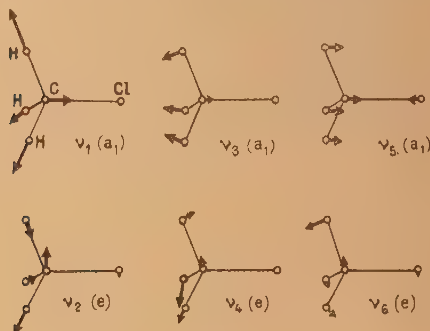


Fig. 1.

ν_1 et ν_2 aux vibrations de valence C — H;

ν_3 et ν_4 aux vibrations de déformation du groupement CH_3;

ν_5 à la vibration de valence C — Cl;

ν_6 à la vibration de déformation de C — Cl.

Cependant, dans la région de 3 μ, on observe, au lieu des deux bandes ν_1 et ν_2 attendues, trois bandes fortes, une perpendiculaire ν_2 et un doublet formé de deux bandes parallèles. On peut attribuer ce doublet soit aux fréquences ν_1 et $2\nu_4$ soit à la résonance de Fermi entre ν_1 (∥) et le sous-niveau parallèle de $2\nu_4$, car les deux bandes parallèles ont des intensités comparables, alors que le sous-niveau perpendiculaire de $2\nu_4$ apparaît avec une intensité beaucoup moindre.

Tableau I.

Fréquences fondamentales des halogénures de méthyle [1].

	ν (cm⁻¹) (dans le vide).			
	CH_3F.	CH_3Cl.	CH_3Br.	CH_3I.
ν_5	1 048;2	732,1	611	532,8
ν_6	1 195,5	1 015,0	952,0	880,1
ν_3	1 475,3	1 354,9	1 305,1	1 251,5
ν_4	1 471,1	1 454,6	1 445,3	1 440,3
$2\nu_4$	2 861,6	2 878,8	2 861	2 861
ν_1	2 964,5	2 966,2	2 972	2 969,8
ν_2	2 982,2	3 041,8	3 055,9	3 060,3 [2]

De plus, Yates et Nielsen [3] ont observé récemment, dans la région de 3 μ, quatre bandes de vibration du fluorure de méthyle : une bande perpendiculaire attribuée à la vibration ν_2, et trois bandes parallèles, que les auteurs interprètent comme résultant d'une double résonance de Fermi entre les niveaux ν_1, $2\nu_5$ et le sous-niveau parallèle de $2\nu_4$ [3].

Tableau II.

Bandes de CH_3F *à* 3 μ (d'après Yates et Nielsen [3]).

cm⁻¹.	Identification.	Nature.
2 818,0.........	$2\nu_4 : 2\nu_3 : \nu_1$	Parallèle
2 862,9.........	$\nu_1 : 2\nu_3 : 2\nu_4$	»
2 966,5.........	$2\nu_3 : 2\nu_4 : \nu_1$	»
3 009,1.........	ν_2	Perpendiculaire

Le spectre d'absorption des halogénures de méthyle, dans la région de l'harmonique $n = 2$ de la vibration C — H à 1,6 μ a été étudié par différents auteurs [4]. Moorhead a fait de ces composés une étude d'ensemble; Nielsen et Barker ont donné une interprétation pour le spectre d'absorption de CH_3Cl, G. et L. Herzberg pour celui de CH_3I. J'ai étudié les spectres d'absorption des chlorure, bromure et iodure de méthyle, dans la région de 1,6 μ au moyen d'un spectrographe à réseau décrit antérieurement [5]. La cuve utilisée

avait 20 cm de long. La pression du gaz dans la cuve était d'environ 70 cm de mercure pour le chlorure, 40 cm pour le bromure, 20 cm pour l'iodure.

Les spectres obtenus sont complexes; leur interprétation est délicate et semble encore incertaine. Leur comparaison donne cependant certains renseignements sur la nature des bandes observées et permet d'envisager un essai d'interprétation des résultats.

La figure 2 représente les spectres de ces trois corps et, dans leur voisinage, le spectre de la vapeur d'eau dans la région de 1,8 μ utilisé pour l'étalon-

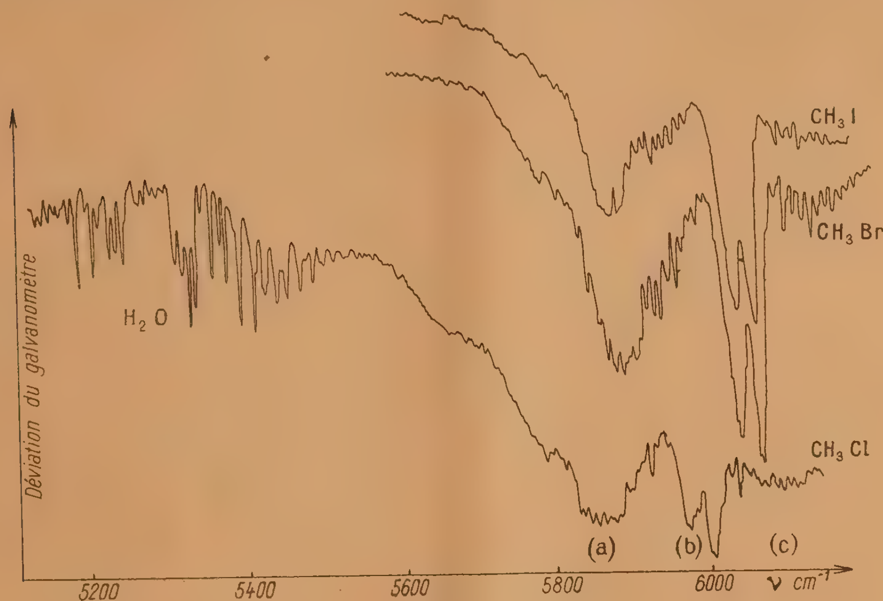


Fig. 2.

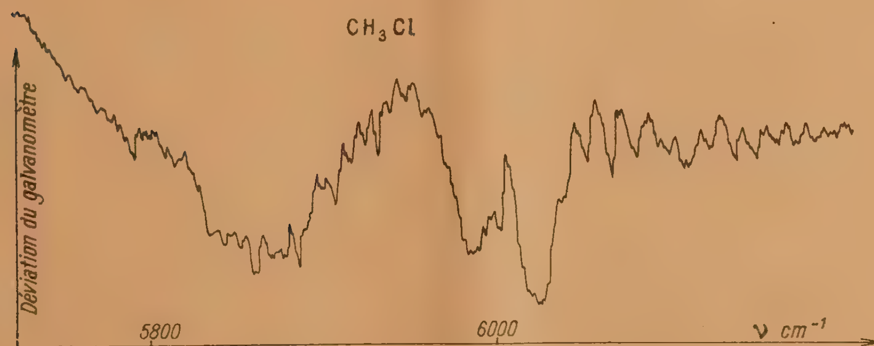


Fig. 3.

nage. Les figures 3, 4, 5 et 6 représentent les spectres, plus étalés, des trois halogénures; l'enregistreur employé possède en effet un dispositif qui permet d'étaler à volonté tel ou tel domaine de longueur d'onde, sans agir sur la partie optique ni par conséquent sur la résolution de l'appareil.

Pour les trois halégonures, on observe, du côté des hautes fréquences, un groupe de deux bandes, l'une parallèle (*b*), l'autre perpendiculaire (*c*) que l'on peut certainement attribuer à l'harmonique $2\nu_2$. Les fréquences des centres de ces bandes sont indiquées au tableau III.

Tableau III.

	b (cm⁻¹).	*c* (cm⁻¹).
CH_3Cl	6 008	6 101
CH_3Br	6 081	6 175
CH_3I	6 076	6 188

Quand on passe du chlorure au bromure et à

l'iodure, la bande parallèle (*b*) change d'aspect. La branche *Q*, très visible sur le spectre du chlorure, beaucoup moins nette sur celui du bromure, n'est plus perceptible sur celui de l'iodure. C'est bien ce

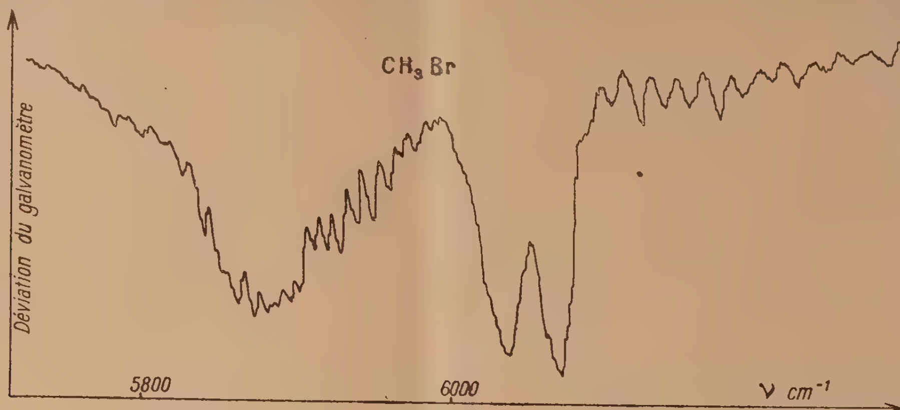


Fig. 4.

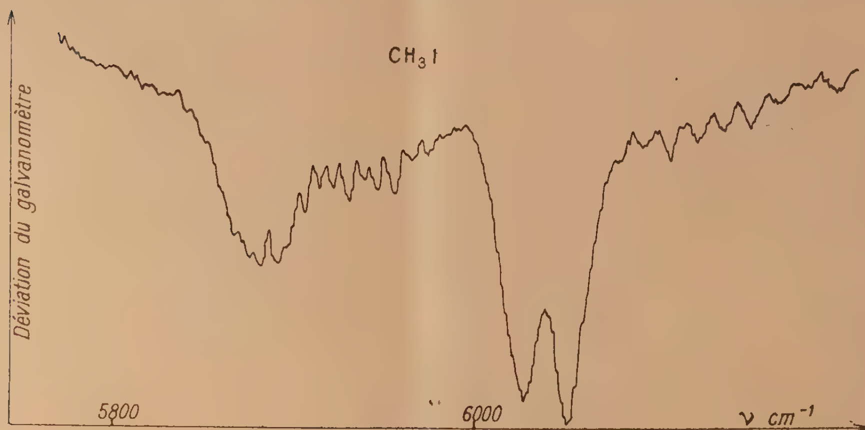


Fig. 5.

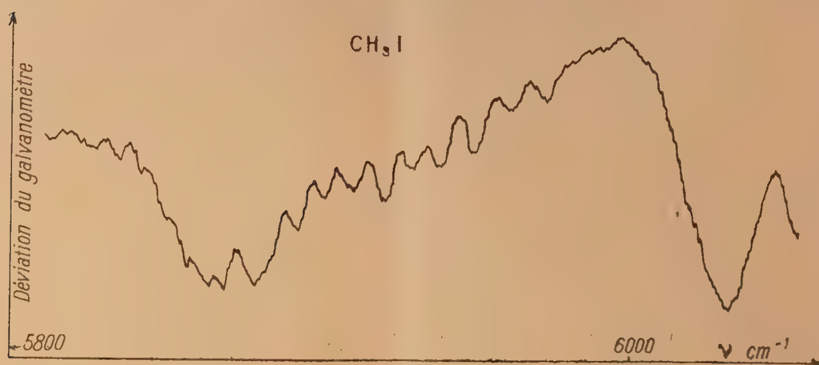


Fig. 6.

à quoi l'on pouvait s'attendre, puisque la molécule CH_3X se rapproche de plus en plus d'une molécule linéaire quand la masse de l'atome d'halogène croît, et que, par conséquent l'ellipsoïde d'inertie s'allonge.

La portion du spectre, située vers les basses

fréquences est beaucoup plus complexe. Le spectre du chlorure paraît présenter, entre 5 650 et 6 000 cm^{-1} un ensemble de bandes perpendiculaires (Q) que l'on peut attribuer à la combinaison $(\nu_2 + (\nu_1, 2\nu_4, 2\nu_3)$ le symbole $(\nu_1, 2\nu_4, 2\nu_3)$ indiquant une double résonance de Fermi entre les niveaux ν_1, $2\nu_3$, et le sous-niveau parallèle de $2\nu_4$.

Dans les spectres du bromure et de l'iodure, on n'observe probablement plus que deux bandes perpendiculaires enchevêtrées que l'on peut attribuer à la combinaison $\nu_2 + (\nu_1, 2\nu_4)$. Le niveau $2\nu_3$ ne participerait plus à la résonance, à cause de son trop grand éloignement (300 à 400 cm^{-1}) par rapport à ν_1 et $2\nu_4$.

La figure 6 représente, très étalé, le spectre de l'iodure de méthyle, dans la région de 5 900 cm^{-1}, mettant en évidence la structure perpendiculaire de la bande située dans cette région. Cette structure apparaît mal dans le spectre (2), à cause du minimum d'absorption accusé que la bande présente à 5 900 cm^{-1}.

On remarque dans les diverses bandes perpendiculaires des trois halogénures l'alternance d'intensité des bandes de vibration-rotation :

forte, faible, faible, forte, faible, faible;

caractéristique des molécules à axe ternaire, alternance due à ce que le poids statistique des niveaux $K = 0, 3, 6, 9$ est plus élevé que celui des niveaux $K = 1, 2, 4, 5$.

Nous aborderons dans un travail ultérieur, un essai d'interprétation qualitative de ces résultats.

Manuscrit reçu le 26 août 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BENNETT W. H. et MEYER C. F. — *Phys. Rev.*, 1928, **32**, 890. — BARKER E. F. et PLYLER E. K. — *J. Chem. Phys.*, 1935, **3**, 367. — NŒTHER H. D. — *J. Chem. Phys.*, 1942, **10**, 664. — HERZBERG G. — Infra. Red and Raman Spectra of Polyatomic molecules, II, p. 315.

[2] LAGEMANN R. T. et NIELSEN H. H. — *J. Chem. Phys.*, 1942, **10**, 668.

[3] YATES K. P. et NIELSEN H. H. — *Phys. Rev.*, 1947, **71**, 349.

[4] NIELSEN H. H. et BARKER E. F. — *Phys. Rev.*, 1934, **46**, 970. — MOORHEAD J. G. — *Phys. Rev.*, 1932, **39**, 83.

[5] Mme MATHIS R., MM. BOSSON F., GAUTHIER G., LARNAUDIE M. — *J. Phys.*, 1950, **11**, 300.

EXPOSÉS ET MISES AU POINT BIBLIOGRAPHIQUES

ÉTAT ACTUEL DE LA TECHNIQUE DE LA MICROBALANCE

Par Mlle Éliane SINGER.

Sommaire. — Naissante il y a 60 ans à peine, la technique de la microbalance n'a cessé depuis lors de se développer et de s'adapter aux exigences de précision toujours plus impérieuses, issues des découvertes scientifiques. Cette évolution se traduit de deux façons :

grosses modifications ou transformations de détail apportées sur les modèles anciens;

construction et emploi de modèles entièrement nouveaux.

Nous avons essayé de relater dans cet exposé ce qui a été fait dans ce domaine depuis ces dernières années.

1. **Introduction.** — Si les premières microbalances apparurent dès 1900 (Warburg et Ihmori, Barger, Nernst et Riesenfeld [1], Angström, Lenz [2], Steele et Grant [3], Gray et Ramsay [4]), elles ne commencèrent à être étudiées soigneusement que vers 1910 lorsque Pregl introduisit en Chimie ses nouvelles méthodes de microanalyse [5]. Après avoir utilisé la microbalance d'Émich [6], il adopta celle de Kuhlmann. Vers 1920, sortirent les balances de Bunge, en Allemagne, de Longue, en France.

Mais le développement des sciences nécessite (et permet) le perfectionnement des instruments de précision : la récente découverte des éléments transuraniens, en particulier, exigeant pour leur étude la pesée d'échantillons de quelques microgrammes avec une précision du 0,01 µg au moins, a rendu indispensable une nouvelle amélioration de la microtechnique.

Nous examinerons ce qui en résulte actuellement en considérant successivement, pour plus de clarté, deux types principaux de balances :

les microbalances à potence et fléau rigide;

les microbalances de torsion, flexion et types divers.

2. **Microbalances à fléau rigide.** — MICROBALANCE BUNGE (limite de charge : 30 g; sensible au 1/1000e de milligramme). — Les microbalances actuelles de la maison Bunge conservent, en gros, les mêmes principes de construction et d'emploi que les primitives, et restent, par excellence, le type de la microbalance pour analyse. Les milligrammes et 1/10e de milligramme se lisent sur la règle graduée à cavalier du fléau; les 1/100e et par interpolation, les 1/1000e de milligramme se déduisent de la différence des amplitudes droites et gauches des oscillations de l'aiguille, sur une échelle inférieure.

Un des perfectionnements apporté est la manœuvre automatique des poids (en effet, non seulement la manipulation des masses marquées est incommode, mais la moindre détérioration, la moindre souillure des poids de 1, 2 et 5 mg, entraîne des erreurs correspondantes en plus ou en moins) [7].

La nouvelle Bunge porte donc, à la partie supérieure droite, deux cadrans qui permettent, par l'intermédiaire d'un arbre placé dans la cage, de

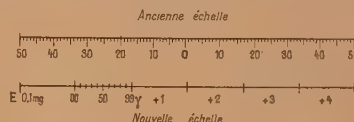


Fig. 1.

poser ou d'enlever des cavaliers : la valeur des poids posés apparaît dans une œillère et peut être lue de façon commode.

Une lunette permet d'amplifier les déplacements de l'aiguille et à un endroit caché de l'arbre d'arrêt se trouve l'interrupteur automatique pour l'éclairage de la lunette (basculeur à mercure).

Le dernier modèle « Anilin » sorti en 1943 possède la supériorité d'être amorti, ce qui permet d'effectuer des pesées rapides.

Sur la nouvelle échelle (*fig.* 1), la graduation en γ (1γ = 1/1000e de milligramme) donne le résultat sous forme d'un nombre de deux chiffres qu'il faut simplement accrocher derrière le poids indiqué par le cavalier.

Le réglage du 0, c'est-à-dire la mise en place de

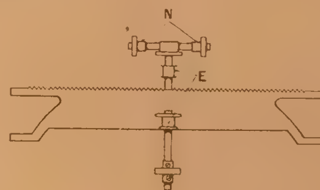


Fig. 2.

l'index lumineux sur le 00 de l'échelle se fait à l'aide de la vis-N (*fig.* 2).

Pour déterminer la sensibilité, on déplace le cavalier vers la droite de 0 à 1 sur le fléau : l'index lumineux

doit se placer exactement sur le repère de sensibilité « E 0,1 mg ».

La cage de la balance possède un double revêtement d'aluminium (matelas d'air = isolant thermique) et une forme presque hexagonale donnant un accès plus facile.

Microbalance Kuhlmann. — Elle est tout à fait identique à la balance Bunge moderne; la seule différence est l'amélioration apportée au système de lecture de l'échelle inférieure par le laboratoire de recherche Kodak en 1944 (ceci pourrait d'ailleurs s'appliquer à une balance Bunge).

La lecture des déviations de l'aiguille sur une échelle blanche à graduation noire, à l'aide d'une lunette monoculaire est fatigante :

MM. Clifton, Tuttle et F. M. Brown [8] ont imaginé de projeter une image de l'échelle pouvant être facilement observée avec les deux yeux. Pour cela, ils ont remplacé l'échelle d'ivoire conventionnelle par une lame d'acier optiquement polie et sans tache, qui reflète environ 80 pour 100 de la lumière incidente.

Les rayons issus de la source après avoir traversé un verre absorbant et une lentille, viennent éclairer l'échelle uniformément; l'image de l'échelle à travers un objectif, dirigée vers le bas par un petit miroir plan, vient se projeter ainsi que l'ombre de l'aiguille sur un écran placé en avant de la balance et visible aisément par l'opérateur (*fig.* 3).

(Une étude de l'énergie absorbée à l'intérieur de la cage montre qu'elle est insignifiante, de l'ordre de 0,03 W, c'est-à-dire moindre que l'énergie radiante venant des autres sources lumineuses de la pièce.)

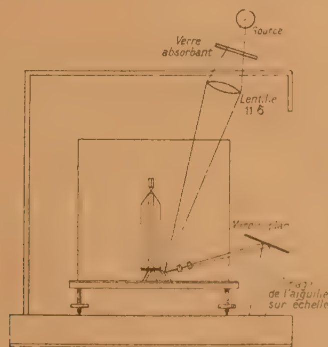


Fig. 3.

Microbalance de Sartorius-Ramberg [9]. — Elle est d'un type analogue aux deux précédentes.

Dès 1933, le Professeur Ramberg de l'université de Upsala avait porté son attention sur l'étude des différents cavaliers et des erreurs à leur sujet. A sa suggestion, la Compagnie Sartorius de Göttingen entreprit la construction d'une microbalance équipée avec une petite baguette de quartz de 2 mg comme cavalier.

Les notes sur cette balance étaient en suédois et n'attirèrent pas vite l'attention des microtechniciens. D'ailleurs, dans cette balance, le petit cavalier de quartz avait tendance à tomber dans l'encoche sans être exactement dans son plan de symétrie.

Dans le modèle actuel, le cavalier est mis en place et bien centré par deux petits battants qui s'ouvrent et se referment en le levant. Une échelle en verre photomicrographique est fixée sur l'aiguille, éclairée par un système de prismes et se déplace devant le réticule fixe d'un microscope.

Le fléau, long de 8 cm porte 41 encoches (correspondant à 1/100e de milligramme). La cage, entièrement métallique (alliage Al-Cu-Zn) est formée de panneaux mobiles donnant un accès facile.

Microbalance apériodique de Longue [10]. — La forme actuelle est presque identique à celle qui sortit vers 1920. Un amortissement à air, obtenu par compression de l'air entre deux cylindres de cuivre au moyen d'une cloche en aluminium suspendue sous

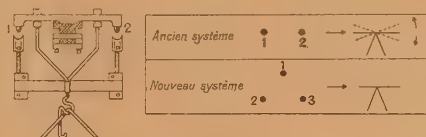


Fig. 4.

chaque plateau, stabilise rapidement le fléau dans sa position d'équilibre dont l'inclinaison varie avec la surcharge. La balance possède en outre les avantages suivants : pas de cavalier, micromètre de grande amplitude porté par l'aiguille se déplaçant devant un microscope et donnant par lecture immédiate les quatre derniers chiffres du poids cherché.

Si le principe reste toujours basé sur l'équation connue $\operatorname{tg} \alpha = \frac{pl}{d\pi}$, des perfectionnements de détail vont être apportés dans la nouvelle microbalance de Longue :

La traverse du système d'arrêt qui, en s'abaissant, dépose les étriers sur les couteaux du fléau, était jusqu'alors munie de deux petites chevilles s'adaptant sur des supports concaves mais pouvant provoquer, à la libération, un balancement de l'étrier se traduisant géométriquement par un roulement plan sur cylindre (diamètre de révolution = 2 μ) (*fig.* 4).

M. Longue a cherché à supprimer ce balancement en munissant le dispositif d'arrêt de trois petites chevilles en triangle, ce qui assure à l'étrier et aux plateaux un mouvement de translation verticale rigoureux.

La rigidité du fléau sera obtenue en utilisant un alliage titane-aluminium.

Microbalance pour fibre textile [11]. — Présentée en 1943 par C. Nanjundayya, M. Sc. et O. B. E. Nazia Ahmad, elle est employée au Technological Laboratory, Indian Central Cotton Committee, à Bombay.

Elle est d'un type semblable à celle de Nernst (*fig.* 5).

La potence A_1 A_2 est surmontée d'une pièce de cuivre en U, C_1 C_2 C_3 sous-tendant une fibre de quartz N ($d \sim 45$-$50\,\mu$). Le fléau en verre capillaire ($d = 0{,}5$ mm) est fixé à la fibre de quartz au moyen d'une petite pièce en aluminium O ($1{,}5 \times 0{,}1 \times 0{,}1$ cm), le bras P_2P_1 (15 cm) portant en P_1 un petit plateau de papier Q (10 mg),

la partie P_3P_4 (20 cm) prolongée d'une fine aiguille. Un bras $G_1G_2K_2K_3$, fixé à la potence, supporte le cadran gradué $H_1 H_2$. De nombreuses vis de réglage

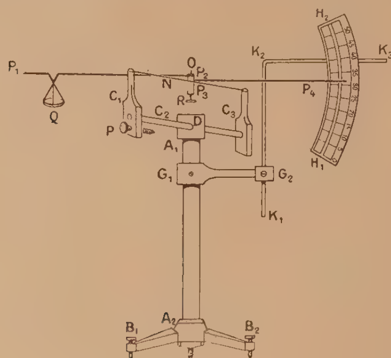


Fig. 5.

et un fil à plomb M permettent de donner aux différentes pièces une position adéquate.

La balance, utilisée pour la pesée de fibres de coton de plus de 0,5 mg possède une sensibilité de 0,0025 mg environ (il est difficile d'accroître la sensibilité, car si l'on augmente trop la longueur de la fibre N, la balance devient douée de petites vibrations).

Microbalance pour préparations [12]. — Étudiée en 1947 au Norwood technical Institute par MM. Stock et Fill, elle est destinée à la pesée d'échantillons en tubes de verre (liquides, poudres) mais peut éventuellement être utilisée à toutes fins.

Les figures 6 et 6 *bis* donnent l'aspect général de l'appareil.

Les parties essentielles de la balance sont en verre.

Le fléau ABC est construit en tubes capillaires de différentes sections : la partie centrale ($d = 2$ mm) est formée de deux tubes en croix $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ ce dernier recourbé et prolongé par une fine baguette de verre γI servant d'aiguille.

A l'extrémité A, se trouve le support pour les tubes à peser.

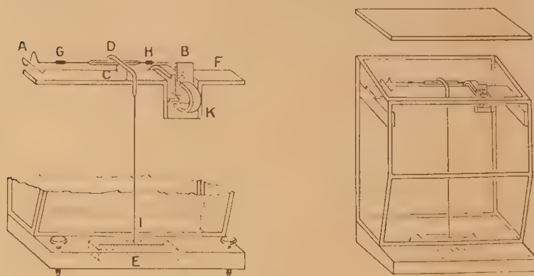


Fig. 6.

A l'extrémité B, se trouve une palette d'amortissement.

Le couteau C est formé de deux fines aiguilles *a*, *b*, fixées dans un tube en U lui-même soudé sous la partie $\gamma\delta$ du fléau; les pointes reposent sur une petite plaque de verre insérée dans le support de bois F (*cf.* détails de constructions sur la figure 7).

Le tout est placé dans une cage de verre (20 × 15 × 12 cm) s'ouvrant par le haut.

On observe les poids sur l'échelle E.

Pour ajuster la sensibilité, on élève ou abaisse le centre de gravité en disposant sur le fléau des petits tas de verre et en déplaçant les cavaliers de réglage G et H.

La balance ayant une période d'environ 2 s, un amortissement était nécessaire : la palette B est une feuille d'aluminium fixée à l'extrémité du fléau, qui se meut entre les pôles de deux aimants en fer à cheval.

La limite de charge est 10 g; le mode primitif de lecture et une sensibilité pas très grande la classe plutôt dans le rang des semi-microbalances. Avantage : excellente reproductibilité.

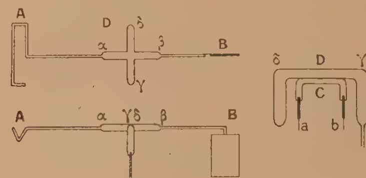


Fig. 7.

Microbalance radioactive de Seederer-Feuer [13]. — L'application du rayonnement des substances radioactives a conduit à la construction d'un nouveau type de microbalance.

Elle possède une sensibilité d'au moins 1 µg par mm de déviation sur un galvanomètre à spot lumineux, une capacité de charge de 25 à 50 g.

La balance radioactive a été étudiée dans les laboratoires de recherche du Canadium Radium and Uranium Corporation, New-York, durant l'année 1947 [14] et présentée en 1948.

Principe. — La balance se compose essentiellement, comme une balance ordinaire, de la potence, du fléau, couteaux, étriers et plateaux.

A l'extrémité d'un bras du fléau est fixée une feuille de substance radioactive en face de laquelle se trouve une chambre d'ionisation. Le courant d'ionisation varie avec le déplacement linéaire de la source et sa valeur, ou plutôt la valeur de la surcharge apparaît sur un galvanomètre sensible, directement gradué en microgrammes après étalonnage.

Description (*fig.* 8). — La source radioactive est de radium, émetteur de particules α, en équilibre avec ses produits de désintégration [15]. Le radium fut choisi pour plusieurs raisons : les émetteurs α fournissent un plus grand courant d'ionisation que les émetteurs β; la source devait avoir une longue période de destruction : celle du Ra = 1622 ans, il ne pouvait en résulter aucune erreur d'étalonnage avec le temps; enfin, le radium est l'un des éléments radioactifs le plus facile à obtenir en assez grande quantité.

Le détecteur utilisé est une chambre d'ionisation à trois plaques P monté sur un engrenage par vis sans fin, pouvant être abaissé ou levé à l'aide de la roue T. Une vis de réglage B permet de placer la chambre à une distance donnée de la feuille radioactive.

L'autre bras du fléau porte un index AS pour repérage visuel du o.

Les trois fils W connectent la chambre d'ionisation à un circuit d'amplification nécessaire car les courants d'ionisation varient de 2.10^{-8} à 1.10^{-12} A.

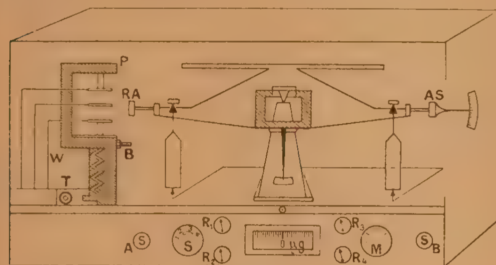


Fig. 8.

Le tableau inférieur de la balance comprend :

- S_A, disjoncteur du tube amplificateur;
- S, interrupteur à quatre positions dont : S_1, position extrême; S_2, position pour circuit grille accélératrice et plaque; S_3, position pour circuit de compensation; S_4, position pour ionisation;
- R_1, R_2, rhéostats pour le circuit de compensation;
- un microampèremètre ou galvanomètre sensible avec échelle 100-0-100 étalonnée 1 μg par division;
- deux potentiomètres R_3, R_4 pour contrôler extérieurement la sensibilité;
- M, gros compteur (5 μA par division) indicateur du courant plaque et du o;
- S_B, interrupteur bipolaire pour le galvanomètre.

En outre, sur la figure 9 : tube amplificateur, potentiomètres de contrôle et batteries.

Le fléau est construit de manière à ce que le centre de gravité soit très bas : ce qui aurait été un inconvénient pour une balance conventionnelle [16, 17], à cause de la sensibilité mécanique très faible en résultant, n'en est pas un pour la microbalance décrite [18] grâce au mouvement de translation radioactif qui

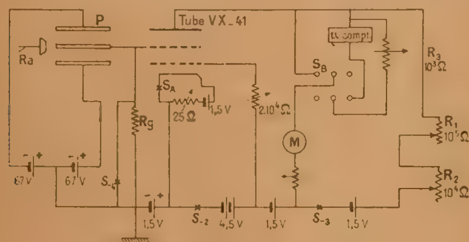


Fig. 9.

permet d'obtenir des déviations très larges pour de minuscules déplacements du fléau et lui confère, au contraire, certaines propriétés :

courte période d'amortissement;

à la fois, grande sensibilité aux poids et sensibilité nulle aux variations du centre de gravité, dues au changement de charge, compression des couteaux, flexion du fléau.

Le fléau porte une double règle à cavalier de 1 à 10 mg (1 div = 1 mg) et de 0 à 1 mg (1 div = 50 μg).

Les couteaux sont en agate du Brésil, les supports en carbure de bore.

La balance est amortie magnétiquement pour pesées rapides mais peut être employée sans amortissement par la méthode des oscillations.

Réglage au zéro. — Il s'effectue comme suit : on tourne S_A; met S en position S_2, le courant plaque porté à une certaine valeur (50 à 100 μA) s'observe dans le compteur M; S est placé sur S_3 et le courant plaque est compensé par les potentiomètres R_1 et R_2; on ferme S_B; la balance est libérée de sa position d'arrêt et la vis de réglage AS permet d'obtenir un o grossier; on ouvre S_B (enlevant le galvanomètre du circuit); S est mis sur S_4 et l'ionisation est observée sur le gros compteur M. La chambre P est alors déplacée au moyen de T jusqu'à ce qu'on lise sur M approximativement o; on ferme S_B, déplace de nouveau P jusqu'à obtenir le o sur le galvanomètre sensible.

Étalonnage. — La sensibilité du galvanomètre a été ajustée au moyen d'un shunt variable R_3 de façon à obtenir une déviation de 50 divisions pour une variation de poids de 50 μg produite par déplacement d'un cavalier sur le fléau gradué.

Pesée. — S est mis sur S_3 et S_B ouvert (enlevant le galva du circuit), l'objet à peser sur un plateau, la balance est amenée à l'équilibre approximatif par des poids appropriés; on met S en position S_4 et ajuste les cavaliers jusqu'à lire o sur le gros compteur; on ferme S_B et observe la déviation : si elle est hors de l'échelle, on déplace le cavalier d'une encoche dans la direction convenable. Finalement, on lit directement les microgrammes.

Sensibilité et stabilité. — La sensibilité mécanique de la balance étant d'environ 0,2 par μg il était nécessaire, pour mesurer ce petit déplacement, d'utiliser un galvanomètre à haute sensiblité. Or, de nombreuses oscillations furent observées, sans doute dues au fait que le nombre de particules atteignant par seconde la chambre d'ionisation varie avec le temps [19]. On sait que la distribution du nombre de particules autour du nombre moyen (quand celui-ci est grand) peut se représenter, en probabilité, par $N \pm \sqrt{N}$, suivant une courbe d'erreur Gaussienne [20]. Afin d'absorber ces fluctuations, deux condensateurs de 500 μ F furent placés entre les bornes du galvanomètre, apportant la stabilité désirée.

La sensibilité peut être accrue en augmentant la puissance de la feuille radioactive et en employant une plus grande chambre d'ionisation, mais on est limité dans ce sens par les dimensions de la balance qui doivent rester dans un ordre de grandeur pratique.

L'utilisation actuelle d'une feuille à 200 μg de radium possédant une puissance radioactive effective de 20 à 25 μg, pourvoit la balance d'une sensibilité suffisante et constante sous charge croissante. Le mode de lecture facile des microgrammes, la grande capacité de charge sont deux autres avantages. Le seul invonvénient est la nécessité de renouveler les batteries et la feuille radioactive.

3. **Microbalances de torsion, flexion et diverses.** — Les microbalances actuelles décrites ci-dessous admettent, avec des adaptations différentes, l'un ou l'autre des principes suivants : l'addition d'un objet à peser :

provoque la flexion d'une tige (microbalance de Salvioni, microbalance pour fibres textiles) ou l'allongement d'un ressort (microbalance à hélice);

ou rompt un équilibre qui est rétabli : par torsion d'un fil (microbalance quartz) ou compensation électromagnétique (microbalance de Manigaut, microbalance électronique de Clark).

La mesure des déformations subies (flexion, allongement) ou des compensations nécessaires au rétablissement de l'équilibre (torsion, force électromagnétique) est une mesure du poids cherché.

Microbalance de Salvioni. — Basée sur les mêmes principes que le premier modèle [21], la nouvelle balance, construite en 1945 [22], sert dans les laboratoires d'étude des éléments lourds.

Capacité de charge : 10,5 mg; sensibilité : 0,02 μg.

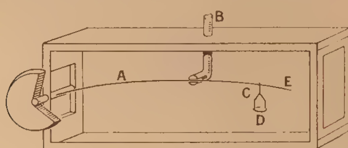


Fig. 10.

Elle se compose d'une très fine fibre de quartz A, solidement attachée à une extrémité, portant à l'autre un étrier en aluminium C de 200 μg et un plateau D en platine de 150 μg (1,5 × 2 mm) (*fig.* 10).

Le poids dépend de l'inclinaison du bras E du fil de quartz, dont la position est repérée à l'aide d'un microscope, étalonné au préalable par l'emploi de poids connus.

B est un système d'arrêt.

Microbalance Lord [23, 24]. — La nécessité de mesurer des fibres de coton de quelques microgrammes avec un instrument sensible mais robuste a conduit à la construction de la microbalance suivante (1947) (*fig.* 11).

Un ruban de bronze phosphoreux R est fixé à une extrémité par un ressort en acier S, l'extrémité libre du ruban porte à l'aide d'un crochet, la fibre à peser. On observe à l'aide d'un microscope le déplacement vertical de cette extrémité et obtient le poids de la fibre en multipliant le nombre de divisions lu sur l'échelle par le facteur de la balance.

Une roue D agissant sur le ressort S par l'intermédiaire d'un levier L permet d'ajuster la hauteur du bout du fléau de sorte qu'il coïncide avec le zéro de l'échelle dans le microscope M.

La balance est protégée des courants d'air par une cage; un battant en cuivre F se levant et s'abaissant permet de placer la fibre sur le crochet; une petite fenêtre en verre W donne de la lumière à l'observateur (*fig.* 12).

La sensibilité varie avec les dimensions du ruban : les calculs montrent que les dimensions requises pour que l'application d'une masse Mg cause à l'extrémité libre un déplacement y, doivent satisfaire à l'équation

$$M = \frac{b\,d^3 E y}{4 g l^3};$$

E, module d'Young pour le matériau;
g, accélération de la pesanteur;
l, longueur du ruban;
b, largeur du ruban;
d, épaisseur du ruban;

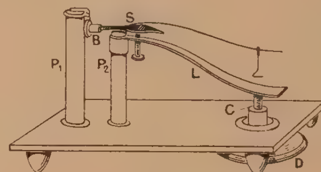


Fig. 11.
La lettre R a été omise en haut à droite de la figure.

les expériences faites donnèrent une déviation de toute l'échelle :

pour une charge de 9 mg avec

$l = 89$ mm, $b = 0,501$ mm, $d = 0,098$ mm;

pour une charge de 0,106 mg avec

$l = 89,5$ mm, $b = 0,141$ mm, $d = 0,0319$ mm;

pour une charge de 0,0266 mg avec des dimensions encore réduites.

La balance est pratiquement insensible aux vibrations.

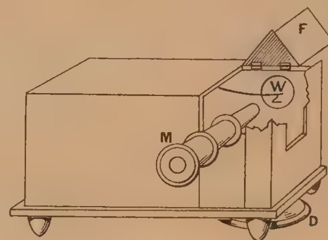


Fig. 12.

Microbalance a hélice de quartz [25]. — MM. Kirk et Schaffer ont présenté en 1948 cette microbalance (du type Emich) composée essentiellement d'un ressort hélicoïdal en quartz enroulé sur un noyau de graphite, enfermé dans un tube de verre (*fig.* 13).

De telles balances avaient déjà été construites en 1926 par Mac Bain et Becker, en 1934 par Pidgeon. Elles servent en général pour des études d'absorption ou pour peser des tissus d'origine animale ou végétale, car à la différence des autres types de balance, elle peut être facilement stérilisée. Le plateau est une feuille d'or, ou d'aluminium ou une bulle de quartz.

L'allongement du ressort est sensiblement proportionnel aux petites charges mais la courbe n'est plus exactement linéaire lorsqu'elles croissent trop; la capacité de charge est faible.

La lecture de la position de l'index se fait à l'aide d'un télescope. La sensibilité varie de 0,005 à 1,4 μg : μ.

(Des corrections pour les effets d'élasticité sont nécessaires pour les pesées dans l'air ou un autre gaz, si la pression varie.)



Fig. 13.

ULTRAMICROBALANCE DE TORSION [26]. — MM. Kirk Craig, Gullberg et Boyer (Université de Californie) ont conçu en 1946 la microbalance suivante pour l'étude des éléments lourds.

Sa capacité de charge est 25 mg; elle est sensible à 0,02 μg.

Son emploi dépasse maintenant le but primitif et elle sert couramment en microanalyse.

A l'exception des plateaux qui sont de fines feuilles de platine (10 mg) toute la balance est en fils de quartz.

La carcasse du fléau (10 cm de long) est posée sur un fil horizontal perpendiculaire à son plan. A chaque extrémité, pend une fibre ($d = 60\,\mu$) à laquelle est fixé un cadre de quartz soutenant le plateau (*fig.* 14).

L'addition d'un poids d'un côté fait incliner le fléau : il est ramené à sa position initiale par torsion dans le sens opposé sur la fibre qui le supporte : la mesure de cette torsion permet de connaître le poids cherché.

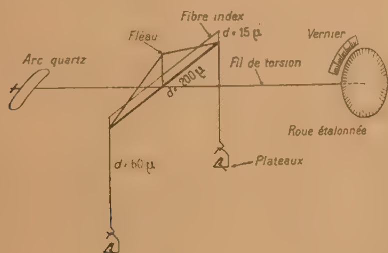


Fig. 14.

Cette « ultramicrobalance » combine le principe de torsion de Neher [27], la suspension des plateaux de Steele et Grant [3], les puits pour plateaux de Petterson [28], et possède, de plus, un microscope de comparaison pour déterminer la position du fléau.

Le fil de torsion (10 cm) est fixé à ses deux extrémités : d'une part, à un arc de quartz permettant de modifier la tension du fil, d'autre part, à l'axe de rotation d'une roue étalonnée.

La sensibilité varie en raison inverse du quart du diamètre de la fibre de torsion et la résistance de tension de cette fibre est sensiblement proportionnelle au carré du diamètre : il en résulte qu'une légère diminution du diamètre augmente la sensibilité beaucoup plus rapidement qu'elle n'abaisse la capacité de charge.

Les calculs montrent que :

à $d = 23\,\mu$ correspond une sensibilité de 0,005 μg par minute d'arc;

à $d = 17\,\mu$ correspond une sensibilité de 0,001 μg par minute d'arc.

La précision de lecture sur la roue graduée est très bonne grâce à un Vernier.

Le mécanisme de support et la première cage sont en cuivre. Une double cage en verre et carton isolant protège la balance des courants d'air, de la poussière et des différences de températures.

Le mouvement du fléau est amplifié par un système optique convenable de prismes à 90°, permettant d'observer quand les deux extrémités du fléau sont horizontales : il faut pour cela que la projection sur l'écran des deux bouts du fil index fasse dans le champ une ligne continue (on obtient ainsi une précision de lecture de la position du fléau d'environ 5 μ).

L'étalonnage de la balance avec des poids usuels est hors de question.

Plusieurs méthodes sont utilisées :

Première méthode. — On prépare la solution d'un sel de concentration donnée (par exemple chlorure de potassium) et, des échantillons variés, prélevés à l'aide de pipettes jaugées sont évaporés sur le plateau de la balance, séchés, et utilisés comme poids-étalons. (Cette méthode est sujette aux erreurs de mesures volumétriques [29] de l'ordre de quelques 1/1000e.)

Avec certains sels (oxalate de Na) le titrage possible de l'échantillon permet de vérifier son poids (erreurs de capillarité de burette).

Seconde méthode. — On pèse un long fil de quartz ou de platine de longueur connue, coupe le fil en parties égales dont on calcule le poids individuel et qui servent d'étalons.

Si elles sont appliquées soigneusement, les deux méthodes donnent des résultats s'accordant à moins de 0,5 pour 100.

MICROBALANCE A COMPENSATION ÉLECTROMAGNÉTIQUE DE MANIGAUT [30]. — Elle a été présentée à l'Académie des Sciences en 1942 par MM. P. Manigaut et Belling Tsaï.

Elle permet de mesurer des forces dont la direction peut être inclinée sur la verticale; de voir comment varient les forces lorsque le point d'application se déplace de très petites quantités.

L'objet sur lequel s'exerce la force à mesurer est fixé à une extrémité (C) d'une tige rigide FC de 0,3 mm de diamètre (pyrex étiré) servant de fléau et fixé en O à un fil de quartz très fin $V_1 V_2$ qui lui est perpendiculaire; une mince plaquette de mica, assujettie au bras OF sert d'amortisseur à air; un ruban d'anhyster (ou de fil de fer doux) est fixé en F perpen-

diculairement à OF; l'équipage est équilibré pour avoir son centre de gravité sur l'axe O (*fig.* 15).

Le ruban de fer doux est engagé dans une petite bobine de 800 tours (fil 0,1 mm) et un courant réglable

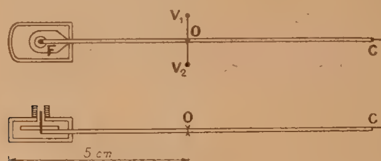


Fig. 15.

passant dans la bobine mobile permet de réaliser l'équilibre de la charge.

L'opérateur observe avec un instrument grossissant un point du fléau, par exemple l'extrémité C et il suffit de lire les indications du milliampèremètre pour connaître la valeur de la force exercée.

La correspondance entre les deux a été établie par un étalonnage préalable.

La masse totale fléau et plateaux est 0,03 g; le poids total avec bobine et amortisseur est 20 g.

Dans le cas où la compensation électromagnétique présente des inconvénients, on peut la remplacer par une compensation électrostatique; l'appareil a servi en particulier à étudier les champs dans l'entrefer de petits aimants permanents en suspendant au fléau une bille de bismuth de 2,2 mg.

Balance électronique de Clark [31]. — La balance électronique présentée en 1947 par Clark est une balance analytique mais le principe a pu être appliqué, après quelques modifications de détail, à la construction d'une microbalance du même type.

Une seule partie est mobile : le plateau et son support.

Une palette attachée au support du plateau intercepte partiellement un faisceau lumineux qui tombe sur une cellule photoélectrique.

Le débit de la cellule est amplifié et connecté à un électroaimant lequel soutient dans l'espace le système mobile (*fig.* 16).

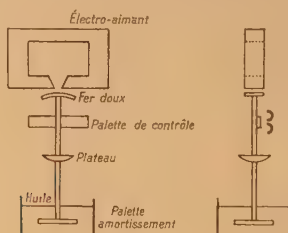


Fig. 16.

L'objet à peser est placé dans le plateau et le courant additionnel requis pour ramener le système à sa position d'équilibre est lu sur un compteur convenable directement étalonné en unités de poids.

La transformation de la variation de position du système mobile en variation de courant, aurait pu être obtenue d'autres manières, à savoir, en faisant varier l'inductance, au moyen d'un noyau de fer attaché au système mobile se déplaçant à l'intérieur d'une bobine, ou en faisant varier la capacité, grâce à une palette attachée au système mobile, sedéplaçant entre les plaques d'un condensateur.

Mais, après essais, le premier dispositif décrit fut adopté de préférence aux deux autres.

L'électroaimant portant a besoin de quatre enroulements :

1 et 2, deux enroulements identiques, polarisés de façon à avoir une amplification nulle à l'équilibre;
3, enroulement à travers lequel passe un courant juste assez fort pour supporter le système dans sa position d'équilibre;
4, enroulement « poids » disposé de telle sorte que le courant qui le traverse s'ajoute à celui de l'enroulement 3.

On pouvait craindre, *a priori*, deux types d'instabilité :

1° *Spatiale.* — Comme tout corps rigide, le système suspendu a six degrés de liberté, trois de rotation et trois de translation, le faisceau lumineux et l'amplificateur lui donnent la stabilité dans la direction verticale; la forme rectangulaire de la pièce portante de fer doux ainsi que la position du centre de gravité sont tels que le système ne puisse se retourner. Donc, la stabilité est assurée.

2° *Temporelle.* — L'ensemble fermé amplificateur, aimant, système suspendu, cellule) est capable d'osciller. On peut trouver deux types d'oscillations : l'un multivibratoire, à cause d'une réponse trop lente du système, l'autre sinusoïdal d'amplitude croissante, à cause d'un amortissement inadéquat.

Les premières sont évitées en augmentant la fréquence du courant d'amplification.

Les secondes sont éliminées en utilisant, par exemple un amortissement à huile.

Si l'on désire effectuer une pesée à ± 1 µg, le poids total du système suspendu doit être aussi petit que possible (10 g), 1 µg correspond à une tension additionnelle de 10 mV à travers les enroulements, ce qui peut être détecté avec un bon voltmètre (tube à vide).

Microbalance photoélectrique. — Un dispositif de lecture photoélectrique a été étudié en 1948 par Ch. L. Rulfs (Prudue University, Lafayette) et mis au point sur une balance analytique. Mais l'idée peut très bien être applicable à des types variés de balances, en particulier aux micro et ultramicrobalances, facilitant la lecture des poids tout en accroissant considérablement la sensibilité [32].

Principe. — Une cellule photoélectrique, placée derrière l'aiguille de la balance, est connectée à un compteur; un écran opaque, très léger, fixé à l'aiguille interrompt partiellement un faisceau lumineux provenant d'une lampe, placée devant l'écran : tout déplacement de la position d'équilibre du fléau fait varier la quantité de lumière atteignant la cellule et se traduit par une variation de courant lisible avec précision sur un compteur convenable.

Applications. — L'auteur disposait d'une bonne balance analytique ordinaire, à cavalier de 5 mg, dont la sensibilité sous charge de 10 g, était 0,0106 mg

par déviation unité et la reproductibilité moyenne des lectures était ±2,11 déviations unités.

Deux cellules (de surface effectivement photosensible 3,8 × 1,9 cm²) furent montées en opposition de chaque côté de la potence à l'aide d'un ruban en cuivre A serré derrière la colonne avec un petit écrou (*fig.* 17 et 18).

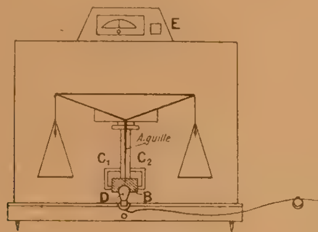


Fig. 17.

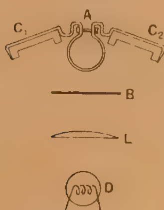


Fig. 18.

Une feuille d'aluminium, enduite d'un côté de noir mat, fut fixée à l'aiguille de façon à couvrir la surface maxima des cellules lors du repos.

Une lampe D (de 115 V, 7 W) était enclose ainsi qu'un système de lentille L convenable dans une petite boîte sombre placée à l'avant de la balance

Une cage E située au-dessus de la balance a pour double but de loger le compteur (un microampère-mètre 20-0-20 A) et de barrer le chemin à une trop puissante illumination qui risquerait d'affecter les cellules.

Afin d'absorber les fluctuations secondaires et de faciliter les lectures, un condensateur de 1000 μF fut placé entre les bornes du compteur (*fig.* 19).



Fig. 19.

Après étalonnage, l'auteur obtint une sensibilité de 0,00194 mg pour 0,1 μA sous une charge de 10 g et une reproductibilité moyenne de lecture de ±0,434 μA.

Ainsi, l'introduction du photo-indicateur peut faire d'une simple balanance alytique, une bonne semi-microbalance, ajoutant aux procédés d'amélioration de la sensibilité déjà décrits par Benedetti-Pichler [33] ou J. B. Niederl et V. Niederl [34].

Ce système a également été appliqué avec succès à des microbalances du type Nernst et Salvioni.

Nous signalerons encore, avant de terminer, quelques microbalances récemment présentées :

celle de Becker [35], à fléau en bronze, amortissement magnétique;

celle d'Ainsworth, fléau en alliage d'aluminium, couteaux en agate dure;

la balance apériodique Stanton [36] à lecture directe, couteaux et supports en saphir synthétique exposée en 1949 à la Physical Socitey's Exhibition, toutes trois sensibles au 1/1000ᵉ de milligramme et ayant une capacité de charge de 20 g;

une ultra-microbalance en quartz d'un type analogue à celle de Kirk et Cie, de caractéristiques un peu différentes (capacité charge = 300 μg; sensibilité = 0,04 μg) mais de construction relativement simple; elle a été présentée par le Dr C. Wilson de la « Queen's University of Belfast » au congrès de Nottingham tenu en septembre 1949 par le Microchemistry Group of the Society of Public Analysts [37].

A ce même congrès le Dr G. F. Hodsman a signalé un nouvel appareil permettant de tailler en une opération toutes les encoches des fléaux à cavalier, au lieu de procéder d'un bout à l'autre successivement.

4. **Conclusion.** — Après nous être attaché à l'instrument lui-même, nous nous devons de signaler brièvement l'influence néfaste de certains agents extérieurs et les dispositions actuellement prises là-contre.

Tous les perfectionnements décrits seraient en effet sans valeur si les microbalances n'étaient placées dans les meilleures conditions requises (salle exempte de vibration, symétrie thermique, symétrie d'éclairage), les pesées effectuées soigneusement, et les poids et étalonnages souvent vérifiés :

Des différences de températures de quelques centièmes de degré peuvent provoquer une erreur de l'ordre du microgramme, d'où la nécessité d'utiliser des cages protectrices efficaces.

Les variations de pression barométrique, notamment au moment des orages, sont sensibles surtout si les tares ont un volume différent des objets à peser, d'où l'emploi, au lieu de grenaille, de tubes scellés de même forme que les tubes absorbeurs [7].

Enfin, on a constaté que le degré hygrométrique optimum est voisin de 50 pour 100.

Ses applications si nombreuses dans des domaines variés de la science ou de l'industrie (chimie des éléments lourds, microanalyse, chimie biologique, textile) justifient pleinement le soin tout particulier avec lequel théoriciens et constructeurs ne cessent d'améliorer la technique de la microbalance.

Manuscrit reçu le 5 novembre 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Nernst et Riesenfeld. — *Ber. dtsch. Chem. Ges.*, 1903, **36**, 2086.
[2] Lenz W. — *Apoth. Ztg.*, 1912, **21**, 123.
[3] Steele B. et Grant K. — *Proc. Roy. Sc. London*, 1909, A **82**, 580.
[4] Ingram G. — *Metallurgia*, Manchester, 1948, **39**, 224.
[5] Pregl et Roth. — Quantitative organische Mikroanalyse, Wien, 1947.
[6] Emich F. et Abderhalden. — *Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden*, 1921, I, **3**, 183.

[7] Martin F. — *Chim. Analyt.*, 1948, **30**, 4-8, 37-40.
[8] Clifton, Tuttle et Brown. — *Ind. Eng. Chem.* (*Analyt. Ed.*), 1944, **16**, 645.
[9] Kuch et Lowenstein. — *J. Chem. Éducation*, 1940, **17**, 171-176.
[10] Pregl. — La Microanalyse organique quantitative, 1923, p. 196-198.
[11] Nanjundayya C., M. Sc et Nazia Ahmad O. B. E. — *Indian J. Agr. Sc.*, 1943, **13**, 649-651.
[12] Stock et Fill. — *Metallurgia*, Manchester, 1947, **37**, 108-110.
[13] Irwing Feuer. — *Analyt. chem.*, 1948, 1231.
[14] Feuer I. et Blau M. — U. S. Patent Application, 1947.
[15] Rutherford E., Chadwick J. et Ellis C. D. — Radiations from Radioactive Substances, London, Cambridge University Press, 1930.
[16] Felgentraeger W. W. — Feine Wagen, Wagungen und Gewichte, p. 117, 2e éd., Berlin, Julius Springer, 1932.
[17] Walker J. — Theory and use of the Physical Balance, p. 14, London, Oxford University Press, 1887.
[18] Seederer J. E. et Feuer I. — U. S. Patent Application, 1948.
[19] Müller R. H., Garman R. L. et Droz M. E. — Experimental electronics, New-York, Prentice Hall Co, 1942.
[20] Cork J. M. — Radioactivity and Nuclear Physics, p. 102, New-York, D. Van Nostrand Co, 1947.
[21] Salvioni E. — Misura di masse comprese fra g 10^{-1} e. g. 10^{-6}, Messina, 1901.
[22] Salvioni. — *Chem. Eng. News*, 1946, 24.
[23] Lord. — *Shirley Institute Memoirs*, 1947, **21**, 1.
[24] *J. Text. Inst.*, 1947, **38**, T. 54-T 9.
[25] Kirk et Schaffer. — *Rev. Sc. Instr.*, 1948.
[26] Kirk, Craig, Gulberg et Boyer. — *Ind Engng. Chem. Anal. Ed.*, 1947, 427.
[27] Neher H. V., in Strong J. — Procedures in Experimental Physics, New-York, Prentice-Hall, 1942.
[28] Pettersonn H. — New Microbalance and its use, dissertation, Stockholm, Goteborg, 1914.
[29] Kirk P. L. et Craig R. — *J. Lab. Clin. Med.*, 1932, **18**, 81.
[30] Manigaut P. et Belling Tsai. — *C. R. Acad. Sc.*, 1942, **214**, 000.
[31] Clark. — *Rev. Sc. Instr.*, 1947, **18**, 915.
[32] Rulfs C. L. — *Analyt. Chem.*, 1948, 262.
[33] Benedetti-Pichler A. A. — Introduction to the Microtechnique of Inorganic Analysis, New-York, John Wiley et Sons, 1942.
[34] Niederl J. B. et Niederl V. — Micromethods of Quantitative Organic Analysis, 2e édit., New-York, John Wiley et Sons, 1942.
[35] Laboratory Apparatus, 1949.
[36] Peacock. — *J. Sc. Instr.*, 1949.
[37] *Metallurgia*, Manchester, 1949, **40**, n° 240, 342.

REVUE DES LIVRES

National Bureau of Standards, **Nuclear Data** (1 vol. 29 × 23 cm, XIV + 309 pages, United States Depart, of Commerce, Washington, 1950, 4,25 dollars).

C'est un recueil de données nucléaires, extrêmement précieux pour tout chercheur en Physique ou Chimie nucléaire. Pour chaque nuclide, depuis le neutron jusqu'au californium, sont données les valeurs les plus certaines d'abondance ou du mode de formation, des périodes et des énergies des rayonnements émis, les schémas de désintégration, les moments nucléaires, les sections efficaces, les références bibliographiques, etc. Des cases vides sont réservées pour des nuclides inconnus mais dont l'existence est possible.

C'est une compilation qui fera autorité, réalisée par un groupe de spécialistes du National Bureau of Standards avec la collaboration du Brookhaven National Laboratory, du California Radiation Laboratory, du M. I. T. et du Comité spécialisé d'Oak Ridge. La bibliographie s'arrête au 1er janvier 1950, mais le prix, très modéré, comprend trois suppléments semi-annuels s'étendant jusqu'au 1er juillet 1951. L'impression est très soignée sur du bon papier, comme il convient à un Ouvrage destiné à être consulté constamment.

M. Haissinsky.

Dubuisson (B.), **Restitution planimétrique des photographies aériennes** (1 vol. 27 × 18 cm, 69 pages, *Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air*, Paris, 1950, 350 f).

Dans ce fascicule, l'auteur se propose de décrire des méthodes de restitution planimétrique à l'aide de photographies aériennes sans recourir aux appareils universels de restitution.

Après avoir décrit le matériel utilisé à bord de l'avion, en particulier le système gyroscopique permettant de repérer la verticale à chaque instant, l'auteur expose les procédés de redressement des clichés et de restitution planimétrique.

Il examine en détail la théorie et l'exécution du cheminement photoplanimétrique sur clichés aériens.

Il termine ensuite par une application assez particulière de ces méthodes, à savoir le contrôle photographique et cinématographique de la tenue en vol des aéronefs.

J. L. Saconney.

Barret (P.), **La mesure des températures de flammes** (1 vol. 27 × 18 cm, 41 pages, *Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air*, Paris, 1950, 300 f).

Dans la première Partie de ce Mémoire l'auteur s'attache à rechercher les causes d'erreur dans la mesure des températures de flamme par la méthode du renversement des raies. La sphéricité et la diffraction du système optique jouent un rôle important.

Ayant en mains un dispositif expérimental suffisamment étudié l'auteur détermine les surfaces isothermes dans la flamme du brûleur Bunsen.

J. L. Saconney.

Brodeau (A), **Étude de matériaux à grand amortissement. Liège et caoutchouc** (1 vol. 27 × 18 cm, 25 pages, *Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air*, Paris, 1950, 250 f).

Après une partie théorique situant le problème, l'auteur étudie expérimentalement pour le liège et le caoutchouc les déformations élastiques, la propagation d'un ébranlement et l'amortissement d'un ébranlement.

J. L. Saconney.

LETTRES AUX ÉDITEURS

UN NOUVEAU PRINCIPE DE SOURCE D'IONS A GRANDE INTENSITÉ

Par J. Sommeria,
Ingénieur au Laboratoire
de Synthèse Atomique d'Ivry.

La source d'ions représentée sur la figure ci-contre est une extension de la source du type Heil-Von Ardenne [1, 2] à un système annulaire. La partie droite de la figure représente une coupe radiale de la source qui est de révolution autour de l'axe horizontal.

La chambre d'ionisation (Ch.) de forme annulaire est placée dans l'entrefer annulaire d'un aimant ou d'un électro-aimant (pôles N et S). Le champ magnétique H dans cet entrefer est radial. Le filament circulaire F porté à un potentiel négatif par rapport à la chambre émet des électrons radialement à travers celle-ci. Les deux électrodes cylindriques M portées au potentiel du filament forment miroirs et permettent un certain nombre d'oscillations des électrons. Le champ magnétique assure la cohésion du flux électronique sous forme d'une nappe circulaire plane.

L'extraction des ions est effectuée à travers une ouverture annulaire pratiquée dans la paroi avant de la chambre d'ionisation par l'électrode E négative par rapport à la chambre.

La partie cylindrique qui prolonge l'ouverture

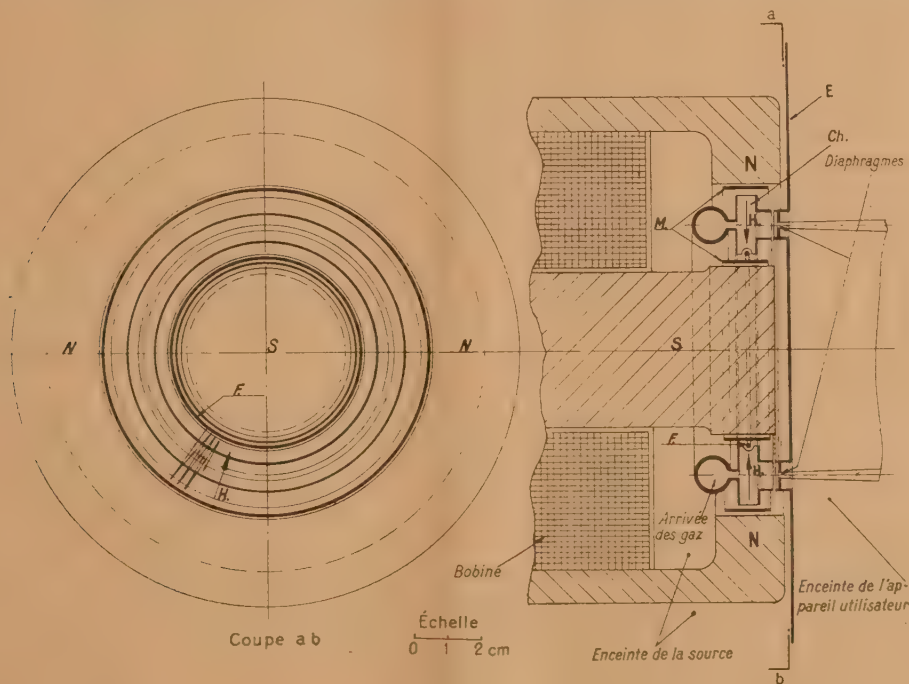


Fig. 1.

d'extraction forme avec l'électrode d'extraction E un système optique qui permet la concentration du faisceau d'ions à travers le diaphragme percé dans E sous forme d'une fente annulaire très fine.

Le faisceau d'ions obtenu a donc une forme tubulaire très favorable au point de vue des effets de dispersion dus à sa charge d'espace qui permet d'atteindre une très grande intensité. La focalisation de ce faisceau dans un système accélérateur à haute tension peut être facilement obtenue.

Nous avons mis au point une source à chambre rectangulaire et à ouverture d'extraction circulaire [3] dont la coupe n'est autre que la ligne génératrice de la source annulaire décrite dans cette Note. Elle produit un courant d'ions de 1 mA environ extrait d'une ouverture de 1 cm^2 et concentré à travers un diaphragme de 3 mm de diamètre; le courant électronique étant de 10 mA. En supposant le courant d'ions extrait à peu près proportionnel à la surface de la nappe ionisée en regard de l'ouver-

ture d'extraction (ce qui a été vérifié à peu près) on peut prévoir pour la source annulaire dessinée ci-contre un courant d'ions total de l'ordre de 20 mA pour un courant électronique maximum de 200 mA.

Dans toutes les sources, en général, le champ électrique extracteur et la charge d'espace perturbent les trajectoires électroniques et par suite la formation des ions. On sait qu'un électron soumis à des champs électrique et magnétique normaux (croisés) subit une déflexion perpendiculaire au plan des deux champs en suivant une certaine courbe en lacet [4]. Dans le cas présent, étant donné la symétrie circulaire du système, il ne peut exister que des champs électriques de composantes radiales ou longitudinales; que ces champs soient dus à l'électrode d'extraction ou aux miroirs réflecteurs, ou à la charge d'espace électronique. Les champs radiaux ne font que freiner ou accélérer les électrons et les champs longitudinaux produisent une déflexion circulaire autour de l'axe du système. Le mouvement général des électrons sera tel qu'il a été représenté sur la partie gauche de la figure; c'est-à-dire, des oscillations avec précession le long de la chambre annulaire. La nappe électronique n'est donc pas déformée par les champs électriques.

On peut donc espérer avec cette disposition une augmentation considérable du rendement d'ionisation (10 pour 100 pour la source à boîte rctangulaire) tout en fonctionnant à très basse pression et même l'obtention d'une décharge autonome sans l'emploi de cathodes chaudes.

[1] Heil. — *Z. Physik*, 1942, **120**, 212-226.
[2] Von Ardenne. — *Physik. Z.*, 1942, **43**, 5-6, 91.
[3] Sommeria J. — *Journal des Recherches du C.N.R.S.*, n° **13**.
[4] Zworykin. — *Electron Optics and the Electron Microscope*, p. 520.

Manuscrit reçu le 7 février 1951.

EFFET DE TEMPÉRATURE DES COMPTEURS ET DES TUBES RADIO

Par A. Daudin et J. Daudin,
Observatoire du Pic du Midi.

Dans les enregistrements de longue durée des rayons cosmiques, on a besoin d'une grande fidélité instrumentale. Les compteurs à argon et vapeur d'alcool généralement employés cessent de fonctionner au-dessous de 5° et leurs caractéristiques sont très variables avec la température. Aussi la plupart des observateurs ont-ils placé leurs appareils dans une enceinte thermostatique. Ceci était impossible au Pic du Midi avant l'arrivée de la puissance électrique, mais nous avions vérifié que les compteurs Maze au méthylal ne présentent pas de tel effet entre — 5° et + 20°.

Rappelons [1] que nous avions enregistré la variation diurne instrumentale du rayonnement global avec un télescope de trois compteurs en plein air et que sur 17° de variation nous n'avons trouvé aucune différence à 6 pour 1000 près. Six compteurs portés vers — 12° n'ont pas vu leur seuil varier de 5 V. Enfin, depuis un an, un banc de 14 compteurs placé dans un local non chauffé a parfaitement fonctionné à des températures allant jusqu'à — 19°. La composition du mélange gaz-vapeur ne paraît pas sensible à la température dans le cas du méthylal.

En juin 1950, nous avons commencé au Pic du Midi à enregistrer des coïncidences entre compteurs noyés dans du plomb (gerbes nucléaires). Cinq compteurs A étaient munis chacun d'une lampe, et seules les coïncidences entre deux d'entre eux entraient en coïncidence avec un autre groupe B de compteurs (au total coïncidences au moins triples entre le groupe B et deux au moins des A). En février, nous constations un effet de température positif, pouvant atteindre 20 pour 100 entre — 10° et — 2° de température extérieure. (Il faisait environ 10° de plus dans le laboratoire.) En avril le dispositif fut examiné en détail : un des compteurs coïncidait mal avec les autres. Cela ne tenait ni à la personnalité du compteur, ni à celle de son tube amplificateur (6 J 7), ni à aucun défaut dans les connexions, mais uniquement à l'emplacement géométrique du tube amplificateur. Ce dernier se trouvait reposer comme ses collègues sur des planches, à même le sol du laboratoire, et sa seule singularité était la suivante : il se trouvait au-dessus d'une fente large de 5 mm entre deux planches de 25 mm d'épaisseur, formant une petite rigole par où l'air pouvait circuler et refroidir particulièrement le têton de grille. En déplaçant la lampe les coïncidences redevenaient normales au bout de quelques secondes.

Le pouvoir séparateur était d'environ 8.10^{-7} s et les alimentations des lampes étaient un peu anormales : chauffage 5, 6 V environ, au lieu de 6, 3 V, écran de 35 V au lieu de 100 (faibles valeurs exigées par le montage). Dans ces conditions le tube 6 J 7 incriminé se trouvait suffisamment refroidi par ce mince filet d'air circulant horizontalement pour que ses caractéristiques soient changées au point de perdre 70 pour 100 des coïncidences.

Avec des tubes à grande pente (télévision E.F.51) nous avons observé également des variations de tension anodique à charge constante, et des variations dans l'amplitude des impulsions de sortie pour les températures très basses.

Il paraît donc nécessaire de se préoccuper de la température des appareils. Si les compteurs y sont presque insensibles, les tubes radio ne le sont pas. Si les pouvoirs séparateurs sont proches du maximum exigible pour les lampes ($\tau < 10^{-6}$), il est nécessaire de veiller à ce que tous les canaux d'amplification se trouvent à la même température.

Cette cause d'erreur n'ayant pas été mentionnée à notre connaissance, nous avons cru utile de la faire connaître.

Nous remercions MM. Robley, Carmouze et le Docteur Ise, pour l'aide apportée à la surveillance et à la discussion de cette expérience.

[1] Daudin A. et Daudin J. — *J. Phys. Rad.*, 1949, **10**, 394.

Manuscrit reçu le 8 février 1951.

SUR UNE SIMPLIFICATION DANS LE CALCUL DES SECTIONS EFFICACES DES PROCESSUS DE COLLISIONS CORPUSCULAIRES

Par Gérard PETIAU.

Dans les méthodes de calcul covariant des sections efficaces des processus de collisions entre corpuscules de spin $\frac{\hbar}{2}$ accompagnés d'émission ou d'absorption de quanta de champs de spin zéro ou $\hbar$, électromagnétiques ou mésiques, on est généralement amené, en fin de calcul, par l'application de la méthode de sommation de Casimir, à l'évaluation d'une somme de traces ou de produits de traces de matrices constituées par des combinaisons des matrices γ^μ_A, γ^μ_B, ... des corpuscules considérés.

Par exemple, dans le cas où un seul corpuscule de spin $\frac{\hbar}{2}$ initialement dans l'état d'énergie-impulsion K^μ_i de masse réduite μ_i $(K^\mu_i K_{i\mu} + \mu^2_i = 0)$, à la suite d'une série d'émissions ou d'absorptions de quanta de champ électromagnétique k^μ_l, k^μ_m, ... de vecteurs de polarisation e^μ_l, e^μ_m, ..., passe par une suite d'états intermédiaires (K^ν_1, μ_1), ..., (K^ν_p, μ_p), ..., (K^ν_q, μ_q), ... et se trouve finalement dans l'état (K_f, μ_f), on est conduit au calcul d'une somme de traces de la forme

$$\Sigma C^{\dots l',m',\dots}_{\dots l'',m'',\dots}\{\mathrm{Tr}(K^\mu_i\gamma_\mu - i\mu_i)\dots(e^\nu_{l'}\gamma_\nu)(K^\rho_{p'}\gamma_\rho - i\mu_{p'}) \times (e^\sigma_{m'}\gamma_\sigma)\dots(K^\mu_j\gamma_\mu - i\mu_j)\dots(e^\nu_{l''}\gamma_\nu) \times (K^\rho_{q''}\gamma_\rho - i\mu_{q''})\dots\}.$$

De même, s'il y a deux ou plusieurs corpuscules A B, ... émettant ou absorbant des quanta de divers champs et liés par des couplages coulombiens (couplages de Møller), on se ramène à des sommes de produits de traces de la forme

$$\Sigma C^{\dots p',l',\dots;\dots q',\dots}_{\dots p'',l'',\dots;\dots q'',\dots} \times\{\mathrm{Tr}(K^\mu_{A_i}\gamma_\mu - i\mu_{A_i})\dots\gamma^\lambda(K^\nu_{A_{p'}}\gamma_\nu - i\mu_{A_{p'}})(e^\rho_{l'}\gamma_\rho)\dots \times(K^\mu_{A_f}\gamma_\mu - i\mu_f)\dots\gamma^\varkappa(K^\nu_{A_{p''}}\gamma_\nu - i\mu_{A_{p''}})\dots\} \times\{\mathrm{Tr}(K^\mu_{B_i}\gamma_\mu - i\mu_{B_i})\dots\gamma_\lambda(K^\nu_{B_{q'}}\gamma_\nu - i\mu_{B_{q'}})\dots \times(K^\rho_{B_f}\gamma_\rho - i\mu_{B_f})\dots\gamma_\varkappa(K^\sigma_{B_{q''}}\gamma_\sigma - i\mu_{B_{q''}})\dots\}.$$

Le calcul de ces traces est considérablement simplifié dans le cas où les matrices correspondant aux processus d'émission, d'absorption ou de couplage coulombien sont de la forme $(e^\mu_l\gamma_\mu)$, γ_5, γ^μ, si l'on introduit en utilisant la relation $\gamma^2_5 = 1$, au lieu des matrices γ^μ, γ_0, γ^5, les matrices

$$\gamma'^\mu = i\gamma^\mu\gamma^5, \qquad \gamma'^5 = \gamma'^5 = \gamma_5\gamma_0 = \gamma^5, \qquad \gamma'^0 = \gamma_5\gamma_5 = \gamma_0$$

et si l'on pose

$$\mu_{A_i} = K^5_{A_i}, \qquad \mu_{B_i} = K^5_{B_i}, \qquad \dots;$$
$$\mu_{A_f} = K^5_{A_f}, \qquad \mu_{B_f} = K^5_{B_f},$$
$$\mu_{A_{p'}} = K^5_{A_{p'}}, \qquad \dots, \qquad \mu_{B_q} = K^5_{B_q}, \qquad \dots;$$
$$e^5_{l'} = e^5_{l''} = \dots = 0.$$

Des expressions telles que

$$\dots(n^\mu_{l'}\gamma_\mu)(K^\nu_{A_p}\gamma_\nu - i\mu_{A_p})\dots \quad \text{ou} \quad \gamma^5(K^\nu_{A_p}\gamma_\nu - i\mu_{A_p})\dots$$

s'écrivent maintenant $(\alpha, \beta = \mu, \nu, 5)$

$$\dots(n^\alpha_{l'}\gamma_\alpha)(K^\beta_{A_p}\gamma_\beta)\dots \quad \text{ou} \quad \dots\gamma_0(K^\beta_{A_p}\gamma_\beta)\dots.$$

Les sommes de traces ou de produits de traces précédentes se ramènent aux formes

$$\Sigma C^{\dots l',m',\dots}_{\dots l'',m'',\dots}\{\mathrm{Tr}(K^\alpha_i\gamma_\alpha)\dots(e^\beta_{l'}\gamma_\beta)(K^\gamma_{p'}\gamma_\gamma)\dots \times(K^\delta_j\gamma_\delta)\dots(e^\varepsilon_{l''}\gamma_\varepsilon)(K^\lambda_{q''}\gamma_\lambda)\dots\},$$

$$\Sigma C^{\dots p',l',\dots\, q',\dots}_{\dots p'',l'',\dots\, q'',\dots}\{\mathrm{Tr}(K^\alpha_{A_i}\gamma_\alpha)\dots\gamma'^\mu(K^\beta_{A_{p'}}\gamma_\beta)\dots \times(K^\gamma_{A_f}\gamma_\gamma)\dots\gamma'^\nu(K^\delta_{A_{p''}}\gamma_\delta)\dots\}$$
$$\{\mathrm{Tr}(K^\alpha_{B_i}\gamma_\alpha)\dots\gamma'_\mu(K^\beta_{B_{q'}}\gamma_\beta)\dots \times(K^\gamma_{B_f}\gamma_\gamma)\dots\gamma'_\nu(K^\delta_{B_{q''}}\gamma_\delta)\dots\}.$$

Dans la dernière expression, la sommation sur les indices α, β s'étend de 1 à 5, celle sur μ et ν seulement de 1 à 4.

L'évaluation de ces traces s'effectue par la méthode usuelle, toutefois la règle qui donne la valeur zéro pour la trace d'un produit d'un nombre impair de matrices γ^μ n'est plus exacte pour un produit de cinq ou plus de cinq matrices γ^α. L'expression obtenue introduit directement des covariants de la forme

$$q_{A_i, A_{p'}}, \quad q_{A_f, A_{p'}}, \quad q_{A_i, A_f}, \quad q_{A_i, B_{p'}}, \quad \dots,$$
$$\left[q_{a,b} = -K_a K_b + (\vec{K}_a . \vec{K}_b) + \mu_a\mu_b\right],$$

pour lesquels on a notamment

$$q_{A_i, A_i} = q_{A_f, A_f} = q_{B_i, B_i} = \dots = q_{a,a} = 0,$$

et dans le second cas (couplages coulombiens) des covariants de la forme

$$K_{A_{p'}, B_{q''}} = -K_{A_{p'}}K_{B_{q''}} + (\vec{K}_{A_{p'}} . \vec{K}_{B_{q''}}).$$

Manuscrit reçu le 15 février 1951.

MESURES SUR LA PRÉCISION DES POINTÉS LONGITUDINAUX

Par B. DOSSIER, P. JACQUINOT, M. MARÉCHAL et G. PIEUCHARD

Dans une précédente lettre [1], nous avons proposé des répartitions d'amplitudes pupillaires permettant de réduire la profondeur de foyer d'un objectif. Nous donnons ici les résultats de mesures visuelles et d'enregistrements photométriques faits avec les diaphragmes proposés (C_0 et L_0), comparés aux diaphragmes classiques uniformes C (circulaire) et L (rectangulaire), ces derniers étant, en outre, comparés entre eux. La confrontation des résultats visuels et des enregistrements montre que l'œil peut être sensible, pour juger de la meilleure mise au point, à la variation d'autres grandeurs que l'éclairement central, qui a servi de base au calcul exposé précédemment.

1° **Pointés visuels.** — Deux séries d'expériences (Institut d'Optique et Bellevue) ont été faites avec deux systèmes optiques différents ayant tous deux une très faible ouverture (Ω = 1/100e), de façon à rester dans le domaine de la diffraction pure, et une

distance focale suffisante (respectivement 2 et 10 m), de façon à mesurer facilement les écarts de mise au point; on pouvait viser soit un point, soit une ligne lumineuse, en lumière monochromatique. Les défauts de mise au point peuvent s'exprimer soit en différence de chemin optique entre rayons centraux et marginaux, soit en *unités Rayleigh* $\left(R = \frac{2\lambda}{\Omega^2}\right)$ correspondant à une différence de marche de $\frac{\lambda}{4}$. Pour chaque type de diaphragme les écarts quadratiques moyens z de mise au point ont été calculés d'après quelques centaines de mesures réparties entre plusieurs observateurs. Dans le cas du diaphragme L_0 on visait non seulement la position du foyer, mais aussi le plan défocalisé de Rayleigh dans lequel on obtient un système de franges d'interférence deux fois plus serrées et dont les alternances d'intensité s'inversent, comme l'a montré Zernike [2], quand on passe par cette position (position sensible). Le tableau donne les écarts $\bar{z}$, ainsi que les *gains de précision G* obtenus par rapport au diaphragme circulaire uniforme. Dans le cas de la comparaison entre diaphragmes circulaires et diaphragmes linéaires on donne deux valeurs de G, la première G_1 supposant un diaphragme linéaire de largeur totale égale au diamètre du diaphragme circulaire, la deuxième G_2 supposant un diaphragme linéaire inscrit dans un carré de diagonale égale au diamètre du diaphragme circulaire (condition de luminosité maximum). La supériorité du diaphragme L_0 utilisé à la position sensible est évidente; elle est dûe à ce que le phénomène observé n'est pas stationnaire, contrairement à tous les autres cas. Il semble cependant que le diaphragme C_0 soit plus agréable à utiliser, tout en conservant un gain de précision $G_2 = 1{,}7$ dans la visée d'une ligne comme dans celle d'un point (ce que le calcul ne faisait pas prévoir).

Source.	Écrans.	Écarts $\bar{z}$.	G_1.	G_2.
Point...........	C	$\frac{\lambda}{30}$	1	–
»	C_0	$\frac{\lambda}{50}$	1,7	1,7
Ligne...........	C	$\frac{\lambda}{30}$	1	–
»	C_0	$\frac{\lambda}{50}$	1,7	1,7
»	L	$\frac{\lambda}{50}$	1,7	0,8
»	L_0 (foyer)	$\frac{\lambda}{70}$	2,3	1,1
»	L_0 (position sensible)	$\frac{\lambda}{200}$	6,7	3,8

2° **Enregistrements.** — La répartition d'éclairements dans l'image d'une *fente lumineuse* a été enregistrée en explorant cette image avec une autre fente très fine. Le système enregistreur photoélectrique était celui du grand spectrographe de Bellevue, qui comporte un système à double faisceau équilibré par servomécanisme; l'optique, la même que pour les pointés visuels, était également celle du spectrographe, dont le prisme était supprimé. Les figures 1 et 2 représentent par exemple les courbes obtenues pour différentes valeurs de la défocalisation z pour les diaphragmes L et C_0. De telles figures ont été

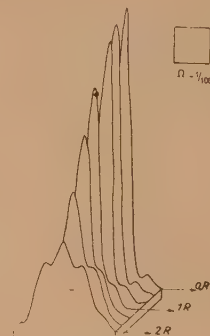


Fig. 1.

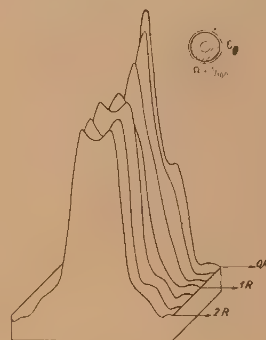


Fig. 2.

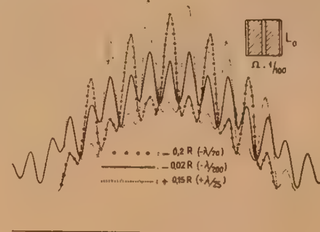
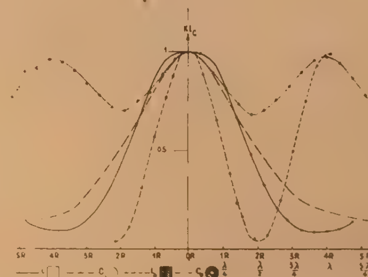


Fig. 3.


Fig. 4.

enregistrées pour tous les types de diaphragmes et la figure 4 représente les variations (normalisées) de l'éclairement central. L'efficacité de L_0 au foyer s'explique suffisamment par cette variation, mais non celle de C_0 avec fente. Pour l'expliquer on peut déterminer et comparer entre elles, d'après la figure 5,

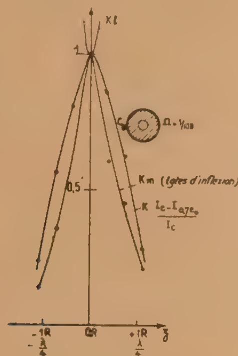


Fig. 5.

les variations (normalisées) des différentes grandeurs auxquelles l'œil pourrait être sensible, largeur du pic central, pente d'inflexion de ce pic, contraste $\frac{I_c - I_x}{I_c}$ entre le centre et l'« épaulement » voisin; c'est cette dernière grandeur qui semble intervenir. La figure 3 représente, sous une forme différente, trois courbes d'éclairement avec L_0 et pour trois positions très peu différentes ($-0{,}2\,R$; $+0{,}02\,R$ et $+0{,}15\,R$) *d'une position sensible*; la figure 6, qui montre les variations

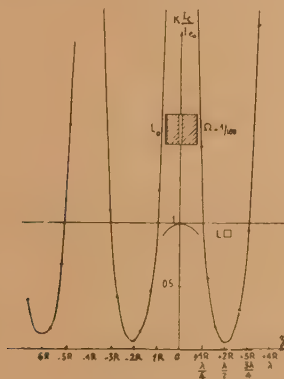


Fig. 6.

du contraste entre deux franges voisines, permet de comparer cette variation non stationnaire à celle, stationnaire, de l'éclairement central dans le cas du diaphragme L et permet de rendre compte de la sensibilité du dispositif. D'après les enregistrements de la figure 3 on peut déterminer une position sensible avec une erreur *inférieure* à $\frac{R}{250}$ $\left(\text{correspondant à une différence de marche de } \frac{\lambda}{1\,000}\right)$, compte tenu des fluctuations ou infidélités de l'enregistrement.

Signalons enfin que nous avons expérimenté par ce procédé l'éclairage cohérent dissymétrique d'une fente de largeur convenable (*voir* [3] et [4]), tel que la pupille (ici rectangulaire) soit couverte par la demi-frange centrale et la première frange latérale de la

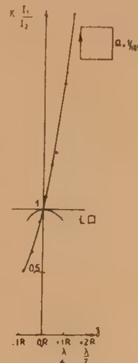


Fig. 7.

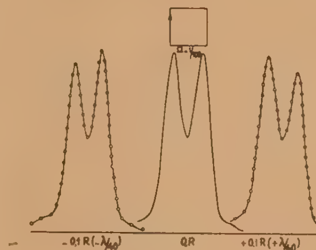


Fig. 8.

figure de diffraction de la fente source. La figure 8 donne les enregistrements faits au foyer et de part et d'autre ($\pm\,0{,}1\,R$) et la figure 7 le contraste entre les deux franges, comparé à la variation d'éclairement central du cas classique. Ce contraste est un nouvel exemple de grandeur non stationnaire : toutefois il varie six fois moins vite que le contraste obtenu avec L_0 à la position sensible.

[1] B. Dossier, P. Jacquinot, A. Maréchal et G. Pieuchard — *J. Physique Rad.* 1951, **12**, 142.
[2] F. Zernike — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1950, **40**, n° 5, 326-328.
[3] M. Duffieux et Coll. — *Ann. Physique*, 1944, **19**, 380.
[4] B. Dossier et P. Jacquinot — *Journal des Recherches du C.N.R.S.*, 1950, **12**, 123-138.

Manuscrit reçu le 16 février 1951.

SUR LA POSSIBILITÉ D'ÉTUDIER L'AIMANTATION NUCLÉAIRE DE LONGUE PERSISTANCE ET SA RELAXATION PAR DES MÉTHODES SIMPLES

Par A. KASTLER,
Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure.

Sommaire. — La grande durée de relaxation de certaines aimantations nucléaires permet d'envisager l'étude de

ces phénomènes et de leurs mécanismes de relaxation en dehors du champ inducteur. Une évaluation numérique montre que la grandeur du paramagnétisme nucléaire est suffisante, à basse température surtout, pour être mesurée par les méthodes classiques du magnétomètre ou de la bobine tournante fournissant une f.é.m. d'induction.

A la suite d'une suggestion de J. Dorfmann [1] les physiciens russes Lasarew et Schubnikow [2] ont réussi dès 1937 à mesurer le paramagnétisme nucléaire du proton dans l'hydrogène solide entre 4,22 et 1,76° K par la méthode classique de la balance dans un champ magnétique non uniforme.

D'autre part les expériences de résonance paramagnétique nucléaire ont mis en évidence l'orientation des noyaux atomiques dans les champs magnétiques [3] et ont permis de mesurer leurs durées de relaxation, c'est-à-dire le temps au bout duquel les noyaux se redistribuent au hasard après suppression du champ. Ce temps peut, dans certain cas, avec des échantillons de très grande pureté, atteindre des valeurs de plusieurs minutes [4]. Lorsqu'on éloigne l'échantillon nucléaire « aimanté » du champ, il conserve pendant un certain temps son aimantation, qui ne décroît que lentement. On peut dire que les noyaux, en quittant le champ, subissent la désaimantation adiabatique qui les porte à une « température de spin nucléaire » extrêmement faible et qu'ils ne se réchauffent que lentement au contact du réseau [5].

Quel est l'ordre de grandeur de l'aimantation persistante qu'on peut ainsi créer ? Elle est donnée par la loi de Boltzmann où T représente la température de l'échantillon placé dans le champ H. Pour le cas simple où le spin nucléaire est $i = \frac{1}{2}$ et où les noyaux ne possèdent que deux orientations opposées dans le champ : $m_i = -\frac{1}{2}$ et $m_i = +\frac{1}{2}$ de différence d'énergie $\Delta E = 2\mu H$ (μ étant le moment nucléaire lié au spin i), les populations des deux niveau sont donnés par

$$\frac{n_-}{n_+} = e^{-\frac{\Delta E}{kT}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\Delta n}{n} = \frac{\Delta E}{kT}.$$

Dans un champ de 50 000 gauss les ΔE sont de l'ordre de 100 à 200 Mc : s. Prenons la valeur moyenne

$$150 \text{ Mc : s} = 5.10^{-3} \text{ cm}^{-1}.$$

L'énergie kT correspond à 200 cm-1 à la température ordinaire (300°K), à 1 cm-1 seulement à la température de 1,5° K réalisable avec l'hélium liquide. On a donc

$$\frac{\Delta n}{n} \sim 2,5.10^{-5} \text{ à } 300°\text{K} \quad \text{ou} \quad \sim 5.10^{-3} \text{ à } 1,5°\text{K}.$$

La substance solide sera par exemple un bloc de Li F qui contient environ $0,5.10^{23}$ noyaux par centimètre cube dont le moment magnétique est de l'ordre de

$$\mu_N \approx 10^{-3}\mu_B \sim 10^{-23} \text{ erg.gauss}^{-1}.$$

L'intensité d'aimantation (moment magnétique par centimètre cube) est donc de l'ordre de

$$I \sim 5.10^{-3}.0,5.10^{23}.10^{-23} = 2,5.10^{-3} \text{ à } 1,5°\text{K},$$

ou 10^{-5} à la température ordinaire.

En aimantant deux blocs d'échantillon pendant quelques minutes dans un champ de 50 000 gauss, en les retirant rapidement du champ et en les rapprochant, on aura dans l' « entrefer » entre les deux blocs, un champ initial de l'ordre de $H_n \sim 2\pi I$, soit environ 10^{-2} gauss à 1,5° K ou 5.10^{-5} gauss à température ordinaire (*voir* Appendice).

Un magnétomètre ayant comme champ directeur le champ terrestre ($H = 0,2$ gauss) permet de déceler un champ perpendiculaire de 5.10^{-6} gauss [6]. Muni d'un couple astatique et d'un champ directeur dix fois plus faible que le champ terrestre, un tel appareil permet donc de déceler sans difficulté des champs de 10^{-6} gauss [7], soit encore 50 fois plus faibles que les champs produits par les aimantations nucléaires à la température ordinaire. (Toutefois, à la température ordinaire, le diamagnétisme induit dans l'échantillon par le champ directeur et par l'aimant du magnétomètre est du même ordre de grandeur que le magnétisme nucléaire et il y a lieu d'en tenir compte. Cette difficulté n'existe pas quand on emploie la méthode de la bobine tournante).

On pourra donc aisément déceler par des mesures magnétostatiques les aimantations nucléaires persistantes, étudier leur décroissance en fonction du temps et recueillir des renseignements utiles sur les mécanismes de relaxation dans des champs nuls.

On peut employer une méthode d'induction basse fréquence en faisant tourner autour des aimants nucléaires une petite bobine dont on amplifie la f.é.m. induite, etc.

Notons aussi qu'un échantillon soumis à un champ magnétique tournant devient le siège d'un couple qui peut devenir important lorsque la période de rotation du champ est de l'ordre de la durée de relaxation de l'échantillon (de l'ordre de $I.H$ pour 1 cm³ soit environ 0,5 erg-radian dans un champ de 50 000 gauss à la température ordinaire (100 erg radian avec He liquide !).

On peut se demander ce qui se passe si dans le champ magnétisant ou en dehors de ce champ on retourne l'échantillon aimanté bout pour bout. Les noyaux tournent-ils avec le morceau de matière ou conservent-ils leur orientation dans l'espace ? La première alternative nous paraît probable, au moins en dehors du champ. S'il en est ainsi la rotation mécanique de l'échantillon doit produire des effets d'induction faciles à déceler avec des amplificateurs basse fréquence, et si l'échantillon est sphérique et isotrope les effets de diamagnétisme n'interviennent pas.

Appendice. — Le champ H au centre de symétrie de l'« entrefer » entre deux blocs cylindriques alignés est donné par

$$H = 4\pi(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)I,$$

où α_2 et α_1 représentent les demi-angles sous lesquels sont vu les faces circulaires externes et internes.

Pour deux cylindres de 1 cm³ de section et 1 cm de longueur, laissant entre eux un « entrefer » de 5 mm d'épaisseur :

$$\alpha_1 = 66°, \qquad \cos\alpha_1 = 0,406, \qquad \alpha_2 = 25°, \qquad \cos\alpha_2 = 0,9\ldots$$
$$H \approx 2\pi I.$$

Dans la méthode d'induction on a intérêt à fa

tourner un cerceau autour d'un échantillon sphérique. La variation de flux par demi-tour est de l'ordre de

$$\Delta\Phi = 2\,\frac{4\pi}{3}\,I\pi r^2,$$

soit pour $r = 1$ cm et $I \sim 10^{-5}$ de $2{,}5.10^{-3}$ Maxwell.

Si le cerceau porte 10^3 spires et tourne à raison de 50 t : s :

$$e = 10^{-8}.10^3\,\frac{2{,}5.10^{-3}}{10^{-2}} = 2{,}5.10^{-6}\ \text{V}.$$

valeur facile à amplifier par un procédé classique.

[1] DORFMANN J. — *Physik. Zeitschr. Sowjet Union*, 1935. **7**, 126.

[2[LASAREW B. G. et SCHUBNIKOW L. W., *Ibid.*, 1937, **11**, 445.

[3] SOUTIF M. — *J. Physique Rad.*, 1949, **10**, 61 D.

[4] POUND R. V. — *Phys. Rev.*, 1951, **81**, 156, et 1950, **79**, 685.

[5] PURCELL E. M. — Congrès Radiofréquences, Amsterdam, 1950.

[6] BRUHAT G. — Cours d'Électricité, Chapitre Magnétisme, § 101 et 249.

[7] FORRER R. — *J. Physique Rad.*, 1929, **10**, 247, 252. — THELLIER. — *Ann. Inst. Phys. Globe*, Paris, 1938, XVI, **157**, 167.

Manuscrit reçu le 24 février 1951.

PHOTOCOMPTEUR DE GEIGER-MÜLLER A CATHODE DE FERRO-NICKEL POUR RAYONS ULTRAVIOLETS

Par J. LABEYRIE,

Commissariat à l'Énergie atomique, Fort de Châtillon, Fontenay-aux-Roses.

SOMMAIRE. — On décrit le mode de construction et les propriétés de compteurs de Geiger-Müller autocoupeurs, très sensibles à l'action des rayons ultraviolets entre 2 000 et 3 000 Å, et pratiquement insensibles au-dessus de 3 600 Å. Ces compteurs sont reproductibles, très stables et de construction facile.

Mode de Construction. — Le compteur mesure 20 mm de diamètre et 160 mm de long. Il est pourvu sur le côté d'une fenêtre plane en quartz de 10 mm environ de diamètre, 1 mm d'épaisseur, scellée au verre au moyen d'Apiezon W. La coque du compteur est en verre ordinaire à la soude (1), de 0,5 mm d'épaisseur. Les charges tombant sur la cathode sont collectées à travers le verre, suivant le procédé décrit par Maze [13], au moyen d'une cathode externe en aquadag. Les extrémités du compteur et la fenêtre de quartz sont laissées nues (*fig.* 1).

La cathode photoémissive est obtenue par évaporation thermique sous vide de la surface du fil central, qui constituera, par la suite, l'anode du compteur. Ce fil est en « platinite », alliage de fer et de nickel (2). Son diamètre initial est de 0,2 mm, il a le même cœfficient de dilatation que le verre de la coque auquel il se soude facilement. L'évaporation du fil doit se poursuivre jusqu'à ce que le dépôt sur la coque réduise la transparence de 20 à 80 pour 100 de sa valeur initiale.

Il est indispensable que la cathode émissive ainsi formée reste à l'abri de l'air.

Les compteurs sont alors remplis avec un mélange d'argon et d'alcool éthylique purs dont les pressions sont respectivement 100 et 15 mm Hg. Nous avons vérifié, sur des compteurs remplis depuis plus d'une année, que les propriétés photoémissives de la cathode n'étaient pas altérées par ce mélange. En outre, après plusieurs millions d'impulsions délivrées par le compteur, la cathode émissive ne montre pas de traces d'altération par les produits de décomposition de l'alcool.

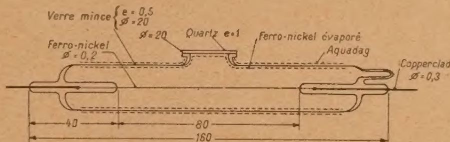


Fig. 1. — Coupe d'un photocompteur. Les cotes sont en millimètres.

Caractéristiques électriques. — Les caractéristiques de ces compteurs sont celles des compteurs à paroi de verre et à remplissage alcool-argon : palier de l'ordre de 300 V, pente inférieure à 5 pour 100 par 100 V, temps mort de l'ordre de 10^{-4} s. Le point de fonctionnement est situé vers 1000 V. Le mouvement propre, sous 5 cm de Pb, est d'une vingtaine d'impulsions par minute environ. Ces caractéristiques ne varient pas pendant au moins un an.

Sensibilité spectrale et rendement. — La sensibilité du photocompteur est maxima (3) à 2 500 Å. Elle est pratiquement nulle (1 pour 100 de sa valeur maxima) à 3 600 Å. (4) La courbe de sensibilité (*fig.* 2) a été obtenue en éclairant le compteur par la lumière provenant d'un monochromateur à optique de quartz (spectrophotomètre standard Beckman), alimenté par la lumière d'une lampe à hydrogène.

Le rendement des photocompteurs est de l'ordre d'une impulsion pour 1000 photons incidents, à 2500 Å. (comparé au rendement, indiqué par le constructeur, des photomultiplicateurs R. C. A. 1 P 28). Cette évaluation est en accord avec la valeur mesurée par Audubert [2] et Mattler [10] pour des compteurs à cathode de CuI.

Conclusion. — Ces compteurs peuvent servir à étudier des phénomènes qui se manifestent par une infime émission de lumière ultraviolette : on peut signaler en particulier ceux qui accompagnent certaines réactions chimiques et physicochimiques [1, 14] et ceux qui apparaissent lors du passage des rayonnements nucléaires, X, ou cosmiques à travers les substances fluorescentes (technique des scintillations) [8, 11, 12, 16]. On peut aussi se servir de ces compteurs pour doser certaines substances par

(1) Verreries de Choisy-le-Roi (Seine).

(2) Aciéries d'Imphy.

Composition indiquée par le fabricant : fer, 50 pour 100; nickel, 49 pour 100; silicium, 0,2 pour 100; manganèse, 0,5 pour 100; carbone, traces.

(3) Ce maximum dérive lentement vers les longueurs d'onde plus courtes. Au bout d'un an, il est situé vers 2 300 Å.

(4) A condition que le compteur n'ait pas subi de décharges trop importantes.

leur absorption dans l'ultraviolet, ou les utiliser comme détecteurs de flammes (par l'ultraviolet qu'elles émettent), sans que la lumière visible ambiante soit gênante.

M. Pierre Bristeau, de la Division des Constructions électriques du C. E. A., a construit et étudié les photocompteurs décrits dans cette Note.

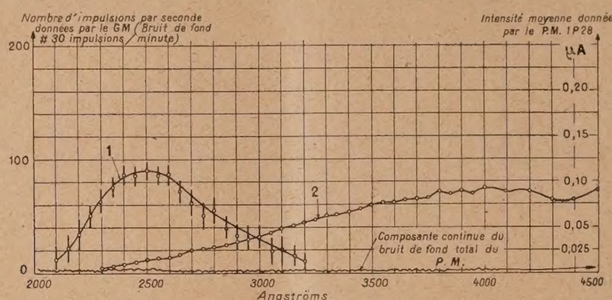


Fig. 2. — Courbes de sensibilité spectrale.
(1) Compteur standard à cathode de ferro-nickel.
(2) Photomultiplicateur R.C.A. 1 P 28 de caractéristiques moyennes.
Monochromateur : spectrophotomètre à quartz Beckman standard. Fente réglée à 0,05 mm.
Source : Lampe à hydrogène Beckman standard.

[1] Audubert et van Dormaal. — *C. R. Acad. Sc.*, 1933, **196**, 1883.
[2] Audubert. — *C. R. Acad. Sc.*, 1935, **200**, 918.
[3] Audubert. — *J. Physique Rad.*, 1935, **6**, 451.
[4] Chastel. — *Cah. Physique*, 1943, **15**, 49.
[5] Christoph. — *Physik. Z.*, 1936, **37**, 265.
[6] Dauvillier. — *J. Physique Rad.*, 1942, **3**, 29.
[7] Duffedack et Morris. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1942, **32**, 8.
[8] Furry. — *Phys. Rev.*, 1947, **72**, 171 (A).
[9] Locher. — *Phys. Rev.*, 1932, **42**, 525.
[10] Mattler. — *C. R. Acad. Sc.*, 1943, **216**, 760.
[11] Mandeville. — *Nucleonics*, 1950, **7**, 4, 92.
[12] Mandeville et Scherb. — *Nucleonics*, 1950, **7**, 5, 34.
[13] Maze. — *J. Physique Rad.*, 1946, **7**, 6, 164.
[14] Rajewski. — *Ann. Physik.*, 1934, **20**, 13.
[15] Scherb. — *Phys. Rev.*, 1948, **73**, 86.
[16] Weisz et Anderson. — *Phys. Rev.*, 1947, **72**, 431.

Manuscrit reçu le 26 février 1951.

NOTE SUR LES RAYONS NUCLÉAIRES

Par Daniel CURIE.

Sommaire. — Ayant déterminé les rayons de divers noyaux à partir de sections efficaces de neutrons très rapides mesurées à Berkeley, on a constaté que la loi suivant laquelle le rayon R augmente avec le nombre de masse A dépend de la couche nucléaire dont s'effectue le remplissage. Ce fait a conduit à rechercher pour cette loi une forme un peu différente de celle utilisée habituellement.

La méthode la plus précise de mesure des rayons nucléaires R repose sur la détermination des sections efficaces totales (réactions + diffusion) pour des neutrons très rapides. On pose en général $\sigma = 2\pi R^2$ la section efficace de réactions et celle de diffusion étant toutes deux voisines de la section géométrique πR^2; mais Feshbach et Weisskopf [1] ont montré qu'il est plus correct d'écrire :

$$\sigma = 2\pi(R + \bar{\lambda})^2, \qquad (1)$$

où $\bar{\lambda}$ est la longueur d'onde *effective* $\left(\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi}\right)$

$$\bar{\lambda}_{\text{cm}} = 4,52 . 10^{-13}\, \frac{A+1}{A}\, \frac{1}{\sqrt{E}}, \qquad (2)$$

A nombre de masse du noyau cible; E, énergie des neutrons en MeV. Aux énergies très élevées (~ 100 MeV) le noyau est plus transparent que l'indique (1), qui admet la validité du modèle du composé de Bohr.

On admet que R croît avec A suivant la loi approximative

$$R = r_0 A^{\frac{1}{3}} \quad (r_0 = \text{const.}), \qquad (3)$$

qui traduit que le volume du noyau est proportionnel au nombre A des nucléons qu'il renferme. On a proposé également [2, 3] :

$$R = r_0 A^{\frac{1}{3}} + b \quad (r_0,\ b = \text{const.}), \qquad (4)$$

b étant l'épaisseur d'une couche superficielle d'épaisseur constante.

Des mesures de σ ont été effectuées récemment à Berkeley [4] pour 33 éléments, de l'hydrogène à l'uranium, avec des neutrons de $E = 42$ MeV obtenus par stripping de deutons accélérés par le cyclotron de 184 inches fonctionnant avec un rayon d'accélération réduit (en fonctionnement normal, on obtient des neutrons $E = 90$ MeV pour lesquels l'effet de transparence perturbe les résultats en dessous de $A = 60$ [5, 6]). Les auteurs ont mesuré l'absorption des neutrons par la cible; leur détection s'effectuait au moyen de la réaction $^{12}C\ (n, 2n)\ ^{11}C$. Ils constatent l'existence d'écarts, très supérieurs aux erreurs expérimentales qui sont de l'ordre de 1 ou 2 pour 100, aux lois type (3) ou (4).

En traçant à grande échelle le graphique $R\left(A^{\frac{1}{3}}\right)$, j'ai constaté qu'on peut l'interpréter comme une succession de lignes droites, à savoir (les rayons sont donnés en unités 10^{-13} cm) :

de $_3$Li ($R = 2,50$) à $_8$O ($R = 3,91$) :

$$R = 2,34\,A^{\frac{1}{3}} - 1,96;$$

de $_9$F ($R = 4,38$) à $_{20}$Ca($R = 5,20$) :

$$R = 1,26\,A^{\frac{1}{3}} + 0,88;$$

de $_{26}$Fe ($R = 5,52$) à $_{50}$Sn($R = 6,48$) :

$$R = 0,98\,A^{\frac{1}{3}} + 1,79;$$

jusqu'à $_{92}$U ($R = 8,72$) :

$$R = 1,37\,A^{\frac{1}{3}} + 1,30.$$

Les rayons ont été calculés à partir de la formule (1), qui introduit une correction non négligeable ($0,70.10^{-13}$ cm pour les noyaux lourds) par rapport aux rayons calculés par la formule $\sigma = 2\pi R^2$ utilisée par les auteurs cités. Notons que les conditions de validité du modèle du composé [libre parcours du neutron dans le noyau $\leqslant R$ et $E < (A-1)$. 8 MeV] sont à peu près vérifiées dès le Li; mais (1) ne devrait pas être appliquée au calcul du rayon du proton et du deuton.

La possibilité de valeurs négatives de b est en désaccord avec son interprétation comme épaisseur d'une couche superficielle. La loi type (4) doit être considérée comme empirique.

Il semble donc que *la loi d'augmentation de R avec A dépend de la couche nucléaire dont s'effectue le remplissage.* Les noyaux pour lesquels se présentent les changements de droites sont en effet connus comme constitués par des couches saturées (noyaux à 8, 20, 50 protons; on conçoit que les discontinuités que l'on attendrait pour les noyaux à couche saturée de neutrons n'apparaissent pas, car il s'agit de σ moyennes sur les différents isotopes stables d'un même élément).

En considérant ces couches, suivant une image semi-classique analogue à celle des orbites électroniques dans les atomes, comme constituant des couronnes concentriques se remplissant successivement, on est amené à suggérer pour chaque couche la loi :

$$R^3 - r^3 = K(A - a) \qquad (r,\ a,\ K = \text{const.}), \qquad (5)$$

où r est le rayon d'une couche saturée formée de a nucléons, le volume de la couronne extérieure étant proportionnel au nombre A-a des nucléons qui s'y trouvent. En toute rigueur les formes (4) et (5) sont incompatibles; cependant, le terme correctif b étant petit, on rend compte également des valeurs expérimentales avec

de Li à O :

$$R^3 - (1,5)^3 = 5,0(A - 4);$$

de O à Ca :

$$R^3 - (3,91)^3 = 3,5\ (A - 16);$$

de Ca à I :

$$R^3 - (5,25)^3 = 1,84(A - 40);$$

au delà de Sn :

$$R^3 - (6,48)^3 = 2,46(A - 79);$$

les écarts étant de l'ordre des erreurs expérimentales; les résultats situés au-delà du Pb ($Z = 82$) sont cependant mieux représentés par

$$R^3 - (7,72)^3 = 3,68(A - 207).$$

Sauf pour la première couche pour laquelle 1,5 d'ailleurs déterminé avec une faible précision est inférieur au rayon 2,3 de l'α, les nombres r sont les rayons des noyaux saturés O, Ca, Sn et Pb. Notons que les rayons de ces noyaux semblent être d'environ 3 pour 100 au-dessous de la droite correspondant à la couche qui s'y achève, et que le premier noyau de chaque couche (Li, F) semble au-dessus des droites, le premier nucléon ajouté après une couche saturée étant particulièrement libre. On doit de plus s'attendre à certaines irrégularités, une couche pouvant commencer à se remplir, alors que la précédente présente encore des places vides.

Manuscrit reçu le 27 février 1951.

[1] FESHBACH H. et WEISSKOPF V. F. — *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 1550.
[2] AMALDI E, BOCCIARELLI D., CACCIAPUOTI B. N. et TRABACCHI G. C. — *Nuovo Cimento*, 1945, **3**, 203.
[3] AGENO F., AMALDI E., BOCCIARELLI D. et TRABACCHI G. C. — *Phys. Rev.*, 1947, **71**, 20.
[4] HILDEBRAND R. M. et LEITH C. E. — *Phys. Rev.*, 1950, **80**, 843.
[5] COOK L. J., MAC MILLAN E., PETERSON J. M. et SEWELL D. C. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 7.
[6] FERNBACH S., SERBER R. et TAYLOR T. B. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 1352.

EMPLOI DES POTENTIELS ET DES ANTIPOTENTIELS DANS LE SCHÉMA CANONIQUE DE LA THÉORIE DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Par BERNARD KWAL.
Institut Henri Poincaré, Paris.

Sommaire. — La seule manière rationnelle de construire le schéma canonique du champ électromagnétique semble consister à envisager à la fois le potentiel et l'antipotentiel. Le nombre des variables canoniques indépendantes et celui des variables conjuguées peuvent, dans ce cas, être égaux, tandis que les deux groupes d'équations de Maxwell-Lorentz se déduisent simultanément du principe de l'action stationnaire.

Il est bien connu qu'on peut introduire en théorie des équations de Maxwell-Lorentz, outre le potentiel habituel, le quadrivecteur A_j, un antipotentiel (tenseur à trois indices B_{ijkl}, complètement antisymétrique). En présence d'une source quadrivectorielle (densité de courant et de charge C_j) l'introduction du quadrivecteur A_j est nécessaire, mais nous pensons qu'elle n'est pas suffisante. Dans le vide, en effet, il *n'existe aucune raison a priori* pour considérer A_j plutôt que B_{ijkl}. Force nous est donc d'envisager ces deux potentiels à la fois, et ce faisant on imprime à la théorie une forme symétrique et l'on évite les difficultés que fait naître la méthode dissymétrique dont on se sert habituellement dans la construction du schéma canonique de la théorie de Maxwell-Lorentz.

Nous allons donc poser

$$\mathcal{H}_{jk} = \partial_j A_k - \partial_k A_j + \partial^n B_{[jkn]}, \tag{1}$$

$$\partial^j A_j = 0, \qquad \partial_{[m} B_{jkl]} = 0, \tag{2}$$

et considérer les A_j et $B_{[jkl]}$ comme variables canoniques indépendantes dans le schéma de Lagrange-Hamilton, en partant de l'Action stationnaire

$$\delta \iiiint L \, d\Omega = 0, \tag{3}$$

où la fonction de Lagrange L est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} L &= \left[\frac{1}{2}\mathcal{H}_{jk}\mathcal{H}^{jk} + C_k A^k\right] \\ &= \frac{1}{2}[(\partial_j A_k - \partial_k A_j)^2 \\ &\quad + 2(\partial_j A_k - \partial_k A_j)\partial_n B^{[jkn]} + (\partial_n B^{[jkn]})^2] \\ &\quad + C_k A_k. \end{aligned} \tag{4}$$

Les équations d'Euler-Lagrange, relatives aux variables A_j, nous fournissent alors le premier groupe d'équations de Maxwell-Lorentz

$$\partial_j H_{jk} = C_k \quad (\square A_k = C_k),$$

tandis que les équations d'Euler-Lagrange, relatives aux variables $B_{[jkl]}$, nous fournissent le second groupe

$$\partial_{[j}\mathcal{H}_{kl]} = 0 \qquad (\square B_{[jkl]} = 0)$$

selon une méthode que nous avons développée récemment [1], à la fonction de Lagrange L, nous associons une fonction de Hamilton H

$$H = -L + \mathcal{H}_{jk}\frac{\partial L}{\partial \mathcal{H}_{jk}} = -C^j A_j + \frac{1}{2}\mathcal{H}_{jk}\mathcal{H}^{jk},$$

qui conduit au *schéma canonique local* suivant :

$$\frac{\partial H}{\partial A_j} = -\partial^k \mathcal{H}_{kj}, \qquad \frac{\partial H}{\partial B_{[jkl]}} = -\partial_{[j}\mathcal{H}_{kl]},$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathcal{H}_{jk}} = \partial_j A_k - \partial_k A_j + \partial^n B_{[jkn]},$$

définissant des « caractéristiques » de l'équation généralisée de Hamilton-Jacobi dans l'espace fonctionnel des potentiels $(A_j, B_{[jkl]}, x_j)$:

$$H\left(A_j, B_{[jkl]}; \frac{\partial S_j}{\partial A_k} - \frac{\partial S_k}{\partial A_j} + \frac{\partial S^n}{\partial B_{[jkn]}}; x_j\right) - \partial^j S_j = 0.$$

[1] *J. de Physique*, 1951, **12**, Avril.

Manuscrit reçu le 2 mars 1951.

SUR UNE MÉTHODE COVARIANTE DE QUANTIFICATION LOCALE EN THÉORIE GÉNÉRALE DES CHAMPS

Par BERNARD KWAL.
Institut Henri Poincaré, Paris.

Sommaire. — La nouvelle méthode s'applique au schéma canonique covariant, dérivé de l'hamiltonien scalaire H, fonction de potentiels q_j. La quantification fait apparaître une fonctionnelle d'état $\psi_j(q_k; x_k)$, à quatre composantes et l'opérateur-quadrivecteur ε_j agissant sur les indices de la fonctionnelle ψ_j. A l'hamiltonien H correspond alors l'opérateur $\left(\frac{\hbar}{i}\right)\varepsilon_j \partial_j$.

Dans une étude récente nous avons examiné l'emploi des méthodes covariantes de la Mécanique analytique, en théorie générale des champs. Cette étude doit être amendée pour tenir compte d'une manière plus précise de la distinction entre la notion des champs et celle des potentiels, distinction que nous croyons essentielle pour établir d'une manière rationnelle et correcte le schéma canonique de toute théorie des champs physiques.

Considérons la fonction de Lagrange L, qui dépend de potentiels q_j et de leurs dérivées

$$\partial_k q_j, \qquad L = L(q_j, \partial_k q_j),$$

et la fonction scalaire

$$H(q_j, p_{k,j}) = -L + \frac{\partial L}{\partial(\partial_k q_j)}\partial_k q_j, \qquad p_{k,j} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_k q_j)}, \tag{1}$$

grâce à laquelle les équations de Lagrange-Euler relatives au principe variationnel

$$\delta \iiiint L \, d\Omega = 0 \tag{2}$$

se ramènent aux *équations canoniques locales*

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\partial^k p_{k,j}, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_{j,k}} = \partial_j q_k. \tag{3}$$

Ces dernières peuvent aussi être considérées comme définissant les « caractéristiques » de l'équation de Hamilton-Jacobi, de l'espace fonctionnel des potentiels (q_j, x_j) :

$$H\left(q_j, \frac{\partial S_j}{\partial q_k}; x_j\right) - \partial^j S_j = 0. \tag{4}$$

Pour quantifier ce schéma canonique, on doit effectuer le passage de la Mécanique ponctuelle de l'espace fonctionnel des potentiels, à la Mécanique ondulatoire de cet espace. A cette fin nous devons introduire *une fonctionnelle d'onde* ou *d'état* ψ_j (q_k, x_k) à quatre composantes, et un opérateur ε_j, de même variance, agissant sur des indices de la fonctionnelle d'état.

L'équation de l'onde fonctionnelle s'écrira alors

$$\left[H\left(q_j, \frac{\hbar}{i}\varepsilon_j\frac{\partial}{\partial q_k}; x_j\right) - \frac{\hbar}{i}\varepsilon^j\partial_j\right]\Psi = 0, \tag{5}$$

et le schéma canonique local de la théorie quantifiée prendra la forme suivante :

$$\left.\begin{aligned} (H, q_j) = \frac{\hbar}{i}\varepsilon^j\partial_j q_k; \qquad (H, p_{j,k}) = \frac{\hbar}{i}\varepsilon^l\partial_l p_{j,k} \\ (p_{j,k}, q_l) = \frac{\hbar}{i}\varepsilon_j\delta_{kl}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

En posant $\psi = \left\{\exp\left(\frac{i}{\hbar}\varepsilon^j S_j\right)\right\} A$, on voit aisément que les équations (4) représentent l'approximation d'optique géométrique des équations (5).

Manuscrit reçu le 2 mars 1951.

Le Gérant : MAURICE BLONDIN. 138063 IMP. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins, Paris. — 1951.